МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ ТА МАРКЕТИНГУ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*як навчальний посібник для студентів,*
*які навчаються за спеціальностями:*
*051 «Економіка»*
*073 «Менеджмент»*
*075 «Маркетинг»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

**Прийняття управлінських рішень в економіці та маркетингу** [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей: 051 «Економіка», 073 «Менеджмент», 075 «Маркетинг» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. І. Іваненко, Ж. Т. Черноусова. – Електронні текстові данні (1 файл: 3,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. –62 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*(протокол № 8 від 30.04.2020 р.)*
*за поданням Вченої ради факультету менеджменту та маркетингу*
*(протокол № 8 від 27.04.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

# ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ ТА МАРКЕТИНГУ

Укладачі: *Іваненко Віктор Іванович*, д-р техн. наук, проф.
*Черноусова Жанна Трохимівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Фартушний Іван Дмитрович*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Войтко С. В.*, д-р екон. наук., проф., завідувач кафедри міжнародної економіки КПІ ім. Ігоря Сікорського

При управлінні складними соціально-економічними системами важливе практичне значення мають задачі вибору альтернатив і пошуку ефективних рішень в умовах невизначеності та ризику, що характеризуються неповнотою й недостовірністю інформації, різноманітністю та складністю впливу на економічні процеси великої кількості екзогенних та ендогенних факторів.

Необхідність оволодіння сучасною термінологією теорії прийняття рішень й обізнаності з її основними поняттями та методами зумовлює актуальність цього посібника. Особливий акцент у ньому зроблено на методологічній складовій теорії прийняття рішень, на описі та аналізі практичних інструментів розробки та прийняття управлінських рішень з метою впровадження інноваційних методів та підходів в практику управлінської діяльності, формування арсеналу інструментів та прийомів сучасного менеджера, економіста, маркетолога.

Навчальний посібник призначений для студентів економічних спеціальностей, студентів-менеджерів, стане у нагоді при вивченні дисциплін: «Системи прийняття рішень», «Методологія прийняття рішень», «Методи прийняття рішень в маркетингу», «Методи прийняття управлінських рішень».

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Складність і динамічність господарських процесів ринкової економіки вимагають від фахівців-менеджерів уміння приймати адекватні ситуаціям управлінські рішення. Адже їх ступінь обґрунтованості та ефективність визначають рівень системи менеджменту організації в цілому. Розробка ефективних рішень є основною передумовою забезпечення конкурентоспроможності продукції та підприємства на ринку, формулювання та реалізації стратегії. Проблема прийняття рішень носить фундаментальний характер, що визначається роллю, яку відіграють рішення в усіх сферах людської діяльності.

При управлінні складними соціально-економічними системами важливе практичне значення мають задачі вибору альтернатив і пошуку ефективних рішень в умовах невизначеності та ризику, що характеризуються неповнотою й недостовірністю інформації, різноманітністю та складністю впливу на економічні процеси великої кількості екзогенних та ендогенних факторів. При розробці рішень керівники всіх рангів зустрічаються з рядом методологічних і технологічних проблем. Часто стримуючим фактором, а інколи й непереборним бар’єром для їх вирішення виступає відсутність знань, навичок, інструментів щодо прийняття рішень, а також неправильне застосування їх на практиці. Френк Харрісон зазначив: «Прийняття рішень – це інтегральна складова управління кожною організацією. Більше, ніж що-небудь інше, компетентність у даній області відрізняє менеджера від «неменеджера», й, що особливо важливо, ефективно працюючого менеджера від його неефективно працюючого колеги».

Необхідність оволодіння сучасною термінологією теорії прийняття рішень й обізнаності з її основними поняттями та методами зумовлює актуальність цього посібника. Особливий акцент у ньому зроблено на методологічній складовій теорії прийняття рішень, на описі та аналізі практичних інструментів розробки та прийняття управлінських рішень з метою впровадження інноваційних методів та підходів в практику управлінської діяльності, формування арсеналу інструментів та прийомів сучасного менеджера, економіста, маркетолога.

Навчальний посібник призначений для студентів економічних спеціальностей, студентів-менеджерів. Він забезпечує знаннями: теоретичних основ прийняття рішень та методів вирішення складних управлінських проблем; методології та інструментарію щодо організації процесу розробки управлінських рішень у різних сферах діяльності; основ створення математичних моделей прийняття рішень в організаційних системах.

А дисципліни з прийняття рішень − «Системи прийняття рішень», «Методологія прийняття рішень», «Методи прийняття рішень в маркетингу», «Методи прийняття управлінських рішень» − сприяють виробленню умінь: застосовувати аналітичний та методичний інструментарій для обґрунтування пропозицій та прийняття управлінських рішень різними економічними агентами (індивідуумами, домогосподарствами, підприємствами та органами державної влади), обґрунтовувати застосування різних математичних моделей і методів прийняття управлінських рішень та оцінювати їх ефективність.

## 1 Система прийняття рішень

Ричард Фейнман, американський фізик-теоретик, один з розробників атомної бомби в Лос-Аламосе, сказав наступне: «Правильне утвердження законів фізики передбачає деякі дуже незнайомі ідеї, які потребують передової математики для їх опису. Тому потрібна значна підготовка навіть для того, щоб дізнатися, що слова означають».

Теорія рішень виникла з потреб різних галузей людської діяльності, таких як медицина, азартні ігри, політика, війна, економіка та фінанси, інженерія. Можливо, це причина термінологічного різноманіття, яке іноді перешкоджає не тільки взаєморозумінню між фахівцями різних галузей, а й розробці самої теорії рішень. У цьому сенсі теорії управління пощастило більше, оскільки її термінологія виявилася загальною для багатьох сфер, де вона застосовується.

Існує дві точки зору на взаємозв’язок між теорією рішень та теорією управління. Згідно з одним із таких поглядів, вони не мають нічого спільного. З іншого боку, ці теорії поступово сходяться, оскільки відмінності між ними не є принциповими. Автори цього посібника є прихильниками останньої точки зору і пропонують наступну мотивацію.

У теорії управління вивчається система управління, яка складається з пари об'єктів: установки і контролера. У теорії рішень вивчається пара, що складається з ситуації прийняття рішення, і людини, яка приймає рішення. Природно називати таку пару *системою прийняття рішень*. Аналогічно визначається система управління.

Проблема вибору рішення чи управління − дії, яка продукує певний наслідок − є проблемою, спільною для обох систем. В обох системах у процесі прийняття такого вибору можуть виникнути дві основні труднощі: динаміка та невизначеність. Розробка теорії управління почалася в інженерії, і динаміка установок стала його центральною проблемою. Розробка теорії рішень почалася в економіці, і невизначеність стала її центральною проблемою. Поки ця дихотомія все ще існує. Проте все більше і більше уваги приділяється невизначеності в теорії управління та динаміці в теорії рішень.

Але все ж є істотна різниця. Хоча вибір критерію рішення знаходиться в центрі теорії рішень, він все ще знаходиться на периферії теорії управління. Систематичне математичне вивчення системи управління стає можливим лише в тому випадку, коли ми визначимо математичні моделі його компонентів: керована установка, контролер та експеримент (спостереження), який контролер може виконувати над установкою. Те саме має стосуватися системи прийняття рішень. Тому ми вводимо поняття системи прийняття рішень та математичних моделей її компонентів: ситуації рішення, особи, яка приймає рішення, і експерименту (спостереження), який особа, що приймає рішення, може виконувати над ситуацією рішення. Спроба визначити модель другого компонента системи прийняття рішень (органу, що приймає рішення) може здатися дивовижною, якщо ми не згадаємо, що наша модель стосується лише послідовності конкретних операцій, які виконує будь-який керівник у процесі прийняття рішень.

## 2 Людина і ситуація

Почнемо з розгляду деяких прикладів.

Приклад 1. У багатьох фольклорах з'являється такий тип епізоду: герой разом із коханою та своїм скарбом їде на коні по дорозі і врешті-решт приходить на перехрестя, де стоїть камінь із таким написом:

Якщо піти вліво, ви можете втратити кохану

Якщо ви підете вправо, ви можете втратити коня

Якщо ви підете прямо, ви можете втратити своє багатство

Герой не може повернутися назад. Адже він герой! Він повинен вибрати одну з трьох доріг, по якій продовжить свої подорожі. Він чудово усвідомлює можливі наслідки кожного з трьох рішень. Наш герой, віддаючи перевагу коханій та коню, ніж своїм багатствам, з невеликим роздумом йде прямо.

Але він врешті-решт дістається ще одного перехрестя та ще одного каменю з таким написом:

Якщо піти ліворуч, ви можете втратити кохану або своє багатство

Якщо ви підете праворуч, ви можете втратити коня чи багатство

Якщо ви ідете прямо, ви можете втратити коня або кохану

Цей вибір складніший. Будучи типовим героєм, він, швидше за все, віддасть перевагу коханій, аніж своєму коню, і тому поверне праворуч. Зрештою, типові герої цінують свого коханого більше за все.

Але в решті решт він стикається з новим перехрестям і новим каменем:

Якщо ви підете ліворуч, ви можете втратити коня або багатство або кохану

Якщо ви підете праворуч, ви можете втратити коня або багатство або кохану

Якщо ви йдете прямо, ви можете втратити коня або багатство або кохану

І тепер у героя є проблема: куди б він не поїхав, це загрожує втратою коханої. Його уподобання (або пріоритети) − кохана цінніша за коня, а кінь − цінніший за багатство − не допомагають йому вибрати оптимальну дорогу.

Свідомий вибір, розумна перевага однієї дороги над іншою, неможливий у цій ситуації: переваги героя тому чи іншому, можливі наслідки його вибору не поширюються на цьому перехресті. Герой, звичайно, може кинути жереб, тим самим піддавшись примхам випадковості. Але якщо він хоче обґрунтувати своє рішення, йому потрібні додаткові дані щодо того, який напрямок пропонує найменшу ймовірність того, що він втратить кохану і хороший шанс нічого не втратити. Для отримання таких даних він звертається до старого ворона, який сидить на гілці сусіднього дуба, і який бачив на цьому перехресті багато мандрівників. Виявляється, що ймовірності різні: на лівій дорозі більший шанс не втратити нічого і менше шансів утримати кохану, ніж на правій дорозі. Тепер рішення героя залежить від його особистості: впевнений у собі герой − можливо, він розглядає себе як непереможний боєць − може повернути ліворуч, тоді як більш обережний, більш розсудливий герой повертає праворуч, бо готовий втратити коня чи свій скарб, якщо він може утримати кохану. Хто з двох − наш герой? Який є більш раціональним?

<u>Приклад 2.</u> Випускник коледжу хоче вибрати напрямок для подальшого навчання: гуманітарні, природничі чи технічні науки Він може бути більш спритним в одному з трьох, але він не знає, в якому з них. Якщо його вибір збігається з його здібностями, то життя буде більш успішним. Але як йому зробити вибір, якщо він не знає своїх здібностей? Знову ж таки, як і герой у попередньому прикладі, наш випускник повинен отримати подальші дані про свій стан, де ми припускаємо, що він перебуває в одному з лише трьох можливих станів, тобто, що він володіє найбільшою здатністю лише в одній з трьох областей . Наш студент може здати деякі тести на здатність, але немає тестів, які могли б виключити можливість помилки. Тож невизначеність ситуації не може бути усунена.

<u>Приклад 3.</u> Вираз «вибір Гобсона» позначає ситуацію, в якій є вибір, але насправді вибору взагалі немає. Томас Гобсон (1544–1610) був підприємцем у Кембриджі, Англія, де працював на конюшні з конями. Виявивши, що клієнти віддають перевагу кращим коням, які стають перевантаженими, Гобсон ввів правило, що замовник повинен прийняти першого в черзі коня біля закритих воріт. Таким чином, замовник не міг ніжити жодні переваги щодо кольору або темпераменту коня. Сьогодні ми можемо сказати, що сплативши плату за наймання коня, замовник сплатив за право участі в лотереї з конями як призами (або наслідками): замовник отримає одного коня з набору коней у стайні. Насправді тут вибору (або прийняття рішень) немає. Вибір був запропонований клієнту раніше: знаючи правила конюшні, він міг погодитися найняти коня або відмовитися від цього. Тут ми б сказали, що він обирає між двома альтернативами:

(1) участь у лотереї з «будь-яким конем Гобсона», як наслідок;

(2) участь в лотереї з «жодним з коней Гобсона», як наслідок.

Можливо, було не так просто утриматися від участі в лотереї Гобсона. Різні етичні (естетичні, моральні, соціальні) міркування можуть сприяти рішенню найняти довільного коня Гобсона. Наприклад, можливо, що ті, хто відвідував конюшню, були членами певної групи чи клубу, до якого було важливо належати, і, таким чином, варто було ризикувати отримати поганого коня.

Сьогодні теорія рішень розглядає лише етично нейтральні альтернативні акти. Традиційним прикладом такого нейтралітету є лотерея, в якій наслідки − це грошові вигоди, а відношення переваг щодо наслідків визначається розміром прибутку. Нехай 10 доларів − це ціна на право участі в будь-якій з двох наступних лотерей: перша лотерея пропонує виграші $ 1,000,000, $ 10, $ 0, а друга пропонує $ 10000, 100 та 0 доларів. Якій лотереї ми віддаємо перевагу? Швидше за все, ми не зможемо зробити усвідомлений вибір, оскільки ситуація досить невизначена. Звичайно, бажання багатства може змусити когось обрати першу лотерею. Але такий вибір був би протилежним байдужості альтернатив. Тому ми спочатку хотіли б отримати деякі додаткові дані щодо ймовірності виграшу в кожній з двох лотерей. Тут можна сказати, що невизначеність у виборі найкращої альтернативи з'являється через невизначеність ситуації: той самий вчинок може спричинити різні наслідки, а той самий наслідок може спричинити різні дії.

Не слід думати, що така неоднозначність у наслідках наших дій виявляється лише в ситуаціях, коли людина має справу з системами, створеними людьми, тобто тими, які функціонують не за законами природи, а за іншими законами, розробленими. людьми. Впливи наших дій щодо різних фізичних чи хімічних систем та їх реакцій (або наслідки наших дій) вивчалися в теорії управління та її застосуваннях, дисципліні, близькій до теорії рішень та її застосувань. Неоднозначність у вищезазначених відповідях також призводить до прийняття рішень в умовах невизначеності. Ось приклад.

Приклад 4. Розглянемо збудування якоїсь деталі або підблока, яка перейде в певний технологічний пристрій. Під час виробництва деталь буде випробувана, піддавшись певному впливу (температурне поле, вакуум, іонне / молекулярне бомбардування тощо) протягом певного періоду часу $t$. Кожна частина вимагає власного часу обробки $t^*$. Але час $t^*$ невідомий на той момент, коли обрано час обробки $t$. Однак ми знаємо, що $t^* \in [T_1, T_2]$, і для того, щоб частина була сертифікована, необхідно, щоб час $t$ не відхилявся від $t^*$ більш, ніж на $\Delta t$, тобто $t$ слід вибирати в такий спосіб, що $| t^* - t | < \Delta t$. Якщо ця умова не виконується, частина визнається непридатною. Зрозуміло, що, якщо $\Delta t < | T_1 - T_2 | / 2$, немає шансів сертифікувати всі деталі. Таким чином, проблема полягає у виборі значення для $t$, яке мінімізує кількість непридатних деталей. Поки що для нас важливо вибрати певне значення $t$. Але коли $t^*$ невідомо заздалегідь, результат (або наслідок) операції невизначений: для будь-якого вибору $t$ можливі хоча б два результати: деталь хороша або погана. Набір можливих альтернатив − це сукупність усіх можливих значень часу $t \in | T_1 - T_2 |$. Тож питання полягає в тому, яке значення $t$ ми обираємо?

Ця проблема нагадує гру «відгадай число», в якій гравець повинен відгадати число, вибране з $\{1, ..., 10\}$ іншою людиною. Якщо він правильно здогадається, він виграє приз, а якщо ні, то втрачає щось. Ця гра є штучною, тоді як у нашій технологічній ситуації ми маємо справу із законами фізики та хімії. Тут з'являється неоднозначність через те, що система відкрита для зовнішнього впливу, про який ми нічого не знаємо. У цьому сенсі немає принципової різниці між фізичною та соціально-економічною системами: обидві можуть перебувати під впливом факторів, «вибраних нами» чи «органами, які приймають рішення», а також «обраними чимось (кимось) іншим», і отже, наші рішення та відповідні дії не визначають наслідку однозначно.

## 3 Параметричні та непараметричні ситуації прийняття рішень (спр)

Неважко помітити, що всі наші приклади мають багато спільного. Дійсно, скрізь у наведених вище прикладах з'являється хтось, хто приймає рішення,опинившись в ситуації, що вимагає прийняття рішення (альтернативи, дії) з певного набору можливих рішень. У першому прикладі − це вибір дороги; е другому, це вибір освітнього профілю; у третьому, це вибір лотереї; у четвертому, це вибір часу обробки. У всіх цих прикладах вибір − прийняття рішення − означає дію, що призводить до певних наслідків. Ми називаємо такі ситуації *ситуаціями прийняття рішень*.

У всіх наших прикладах принаймні одна дія може мати кілька можливих наслідків, і лише одна з них відбудеться. У всіх прикладах наслідок впливу особи, що приймає рішення, може бути результатом більше, ніж однієї його дії, і той, хто приймає рішення, точно не знає, яка дія породжує цей наслідок. Саме тому такі дії називаються «рішеннями в умовах невизначеності».

У всіх прикладах керівник, який приймає рішення, може мати деякі дані про «ймовірності» на користь того чи іншого наслідку. Іноді, перш ніж приймати рішення, особа, яка приймає рішення, може здійснити деякий експеримент (спостереження), який би надав додаткові дані про ці «ймовірності». Отже, дані про ситуацію прийняття рішення зазвичай діляться на апріорні дані, ті, які особа, що приймає рішення, має перед експериментом, і апостеріорні дані, ті, які вона має після експерименту.

Зауважте, що в усіх наших прикладах не існує залежності між наслідками різних дій: якими б не були наслідки дії, вона жодним чином не впливає на наслідки інших дій. Ми обмежуємося в посібнику цією незалежністю наслідків. Як ми побачимо згодом, ця незалежність, індукована структурою причинно-наслідкового механізму ситуації, певним чином збільшує складність ситуації прийняття рішення.

Нарешті, зауважимо, що наші приклади природно утворюють дві групи. Перша група включає приклади 1 та 3, тоді як друга включає приклади 2 та 4. А саме, у ситуаціях, що належать до другої групи, є явно присутній «фізичний» параметр, який поряд із діями особи, що приймає рішення, впливає на наслідки. Так, у прикладі 2 цей параметр є справжнім, але невідомим покликанням випускника коледжу; у прикладі 4 − це справжній, але невідомий особі, яка приймає рішення, час обробки деталі машини. У ситуаціях першої групи не існує такого явного параметра. Тим не менш, набори можливих результатів (наслідків), які відповідають діям особи, що приймає рішення, все ще є такими, що він не знає, яка з його дій призведе до необхідного результату.

Ми називаємо ситуації першого типу (першої групи) *непараметричними ситуаціями*, тоді як ситуації другого типу (другої групи) називаються *параметричними ситуаціями*. У зв’язку з цим існує два типи експериментів або спостережень, які можуть бути передбачені особою, що приймає рішення. У ситуаціях непараметричного типу керівник може спостерігати лише наслідки (можливо, спотворені) своїх попередніх дій (рішень). Так, у прикладі 1 герой отримує такі спостереження від ворона. У ситуаціях параметричного типу керівник також може спостерігати наслідки своїх попередніх дій. Але іноді, перш ніж приймати рішення, він може спостерігати значення (яке може бути спотворене) параметра, який впливає на наслідки. Так у прикладі 2 випускник може спостерігати результати деяких спеціальних тестів. Зауважте також, що в параметричних ситуаціях іноді можуть бути передбачені обидва типи спостереження.

Наостанок зазначимо, що всі наші приклади мають однакову структуру, схема якої представлена на рис. 1,
де DM − особа, яка приймає рішення, DMS − ситуація прийняття рішень. Вони з’єднані каналами 1 і 2. Через канал 1 приймаючий рішення отримує дані
$S = (Z, I)$ про ситуацію до прийняття рішення. Через канал 2 особа, яка приймає рішення, обирає дії $u \in U$, які призводять до наслідків $c \in C$ на каналі 3. Канал 4− це експеримент першого типу; канал 5 − експеримент другого типу. Нарешті,
$\theta \in \Theta$ − невідомий параметр у ситуації параметричного рішення.

Ми називаємо структуру, що складається з ситуації прийняття рішень і приймаючого рішення, *системою прийняття рішень*, аналогічно теорії управління, де пара, що складається з керованої установки і контролера, називається системою управління. Якщо експеримент робиться, ми говоримо, що маємо справу з *системою прийняття рішень з експериментом*.

Наша мета − вивчення систем прийняття рішень. Для такого дослідження нам потрібні математичні моделі всіх частин системи прийняття рішень: ситуації прийняття рішення, особи, яка приймає рішення, і експерименту.

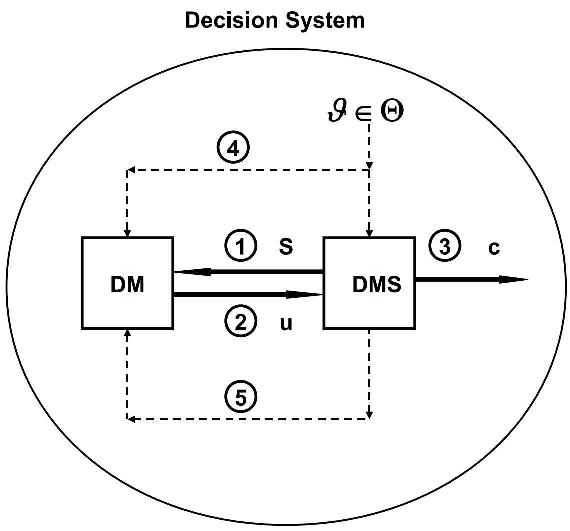



Рисунок 1 − Структура системи прийняття рішень

Ми припускаємо, що все, що невідоме особі, яка приймає рішення, впроваджується в систему прийняття рішень лише ситуацією, в якій приймається рішення. Побудуємо математичну модель ситуації прийняття рішення у вигляді пари $S = (Z, I)$, де $Z$ − схема ситуації рішення, а $I$ − дані про закономірність механізму причинно-наслідкових дій. Вищезазначене існування двох класів ситуацій прийняття рішень − непараметричних та параметричних − породжує дві різні моделі ситуацій прийняття рішень.

## 4 Лотерейна та матрична схеми спр. Їх еквівалентність

Для будь-якої ситуації ми допускаємо наступну термінологію та позначення. Ми говоримо, що особа, яка приймає рішення, повинна вибрати рішення $u$ з деякого набору $U$ усіх допустимих рішень для даної ситуації, тобто $u \in U$. Будемо ідентифікувати рішення $u$ дією, яка може генерувати деякий наслідок $c$ з множини всіх можливих наслідків $C_u$ цього рішення.
Нехай

$$\bigcup_{u \in U} C_u = \boldsymbol{C}$$

позначає сукупність усіх можливих наслідків ситуації.

Ми називаємо трійку

$$Z_l = (U, C, \psi(\bullet)) \qquad (1)$$

*схемою лотерейної ситуації* прийняття рішень або просто схемою лотереї. Відображення $\psi(\bullet)$ іноді записується у вигляді параметричного набору ($C_u$, $u \in U$), а схема лотереї аналогічно у вигляді трійки

$$Z_l = (U, C, (C_u, u \in U)).$$

Ми називаємо четвірку

$$Z_m = (\Theta, U, C, g(\bullet,\bullet)) \qquad (2)$$

*матричною схемою*. Тут $\Theta$ − це набір усіх можливих значень невідомого параметра $\theta$, який може обрати хтось, крім особи, яка приймає рішення. У схемі лотереї (1) багатозначне відображення

$$\psi\colon U \to 2^C \in \{2^C\}^U$$

описує причинно-наслідковий механізм породження або генератор наслідків у ситуації прийняття рішень. У матричній схемі (2) однозначне відображення $g$: $\Theta \times U \to C$ є ще одним описом причинно-наслідкового механізму породження наслідків.

Якщо особа, що приймає рішення, нічого не знає про закономірність механізму причинно-наслідкових дій, то модель ситуації зводиться до її схеми або вичерпується нею.

Цілком природно використовувати схему лотереї $Z_l$ для моделювання непараметричної ситуації, а матричну схему $Z_m$ при моделюванні параметричної ситуації. Однак не важко помітити, що можна описати параметричну ситуацію з точки зору лотерейної схеми $Z_l$ та непараметричну ситуацію з точки зору матричної схеми.

Дійсно, нехай непараметрична ситуація описується з точки зору лотерейної схеми $Z_l = (U, C, \psi(\bullet))$. Для того, щоб описати цю ситуацію за допомогою матричної схеми $Z_m$, необхідно побудувати множину $\Theta$ та відображення $g(\bullet,\bullet)$ таким чином, щоб зберегти «складність» вихідної схеми лотереї.

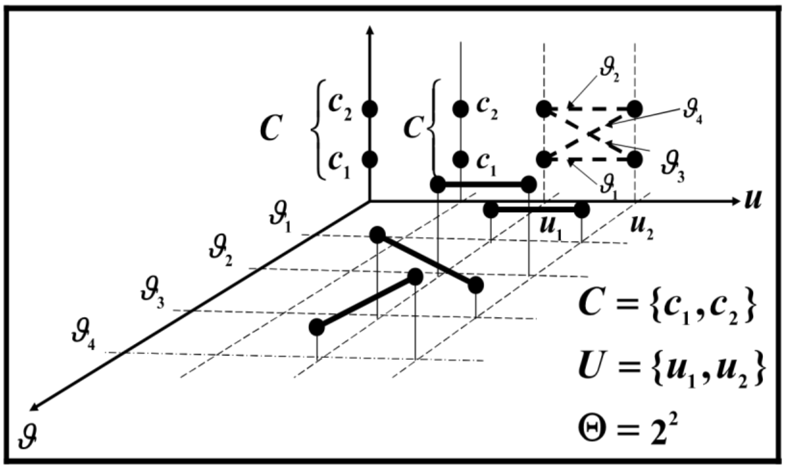



Рисунок 2 − Узгодженість між лотереєю та матричною схемою

Зауваживши, що у відповідь на обрану дію $u \in U$, причинно-наслідковий механізм породжує лише один наслідок $c \in C_u$, ми описуємо складність вихідної непараметричної ситуації з точки зору множини всіх складних подій

$$\Theta\hat{} = \{\theta\hat{} \in (U \rightarrow C): \theta\hat{}(u) \in C_u, \forall u \in U\}. \quad (3)$$

Тут $\theta\hat{}(\bullet)$ − однозначна функція з областю визначення $U$ (див. рис. 2).

Крім того, доцільно оцінювати складність ситуації, описану в схемі лотереї (1), за ємністю $m$ множини $\Theta\hat{}$, припускаючи $m(\Theta\hat{}) = m(C^U)$.

У випадку скінченних множин $U$ і $C$ очевидно, що складність задається числом

$$\mathrm{Card}(\Theta\hat{}) = \mathrm{Card}(C^U). \quad (4)$$

Покладаючи

$$\theta\hat{}(u) = g\hat{}(\theta\hat{},u), \quad (5)$$

отримаємо матричну схему $Z\hat{}_m = (\Theta\hat{}, U, C, g\hat{}(\bullet,\bullet))$, в якій на відміну від матричної схеми $Z_m = (\Theta, U, C, g(\bullet,\bullet))$, що описує деяку параметричну ситуацію , параметр $\theta\hat{}$ є штучним і може не мати фізичного сенсу. Слідом за Севіджем можна назвати цей штучно побудований параметр $\theta\hat{}$ станом природи.

Процедура, визначена операціями (3) та (5), називається *параметризацією*. Параметризація визначає відображення

$$\tau: \mathbf{Z}_l = \{Z_l = (U, C, \psi(\bullet))\} \rightarrow \mathbf{Z}\hat{}_m \{Z\hat{}_m = (\Theta\hat{} ,U, C, g\hat{}(\bullet,\bullet))\}, \quad (6)$$

де $\mathbf{Z}_l$ і $\mathbf{Z}\hat{}_m$ − класи всіх лотерейних схем та матричних схем, що еквівалентні за потужністю.

Зрозуміло, що матрична схема $Z\hat{}_m$ завжди може слугувати для відновлення вихідної схеми лотереї $Z_l$. Дійсно, визначимо багатозначне відображення $\psi(\bullet)$ за наступним правилом:

$$\psi(u) = \{g\hat{}(\theta\hat{}, u): \theta\hat{} \in \Theta\hat{}\}\ \forall u \in U. \tag{7}$$

Ми називаємо цю процедуру *стисненням*. Воно визначає зворотне відображення

$$\chi: \mathbf{Z}\hat{}_m = \{Z\hat{}_m = (\Theta\hat{}\ ,U, C, g\hat{}(\bullet,\bullet))\} \rightarrow \mathbf{Z}_l = \{Z_l = (U, C, \psi(\bullet))\}. \tag{8}$$

Відображення (6) і (8) бієктивні, тому множини $\mathbf{Z}_l$ і $\mathbf{Z}\hat{}_m$ еквівалентні (мають однакові потужності).

Тоді, враховуючи (6) і (8), маємо

$$\chi[\tau(Z_l)] = \chi[\tau(U, C, \psi(\bullet))] = \chi[\{\theta \in (U \rightarrow C): \theta(u) \in \psi(u), \forall u \in U\},$$
$$U, C, \{g(\bullet,\bullet): g(\theta,u) = \theta(u), \forall\theta \in \Theta, \forall u \in U\}] =$$
$$= (U,C,(\{\theta(u): \theta \in \Theta\},\forall u \in U)) = (U,C,\psi(\bullet)) = Z_l, \forall Z_l \in \mathbf{Z}_l. \tag{9}$$

Цей результат може бути записаний у вигляді наступної теореми.

**Теорема 1.** Клас ситуацій прийняття рішень, який може бути представлений матричною схемою $Z_m$, збігається з класом ситуацій, які можуть бути представлені схемою лотереї $Z_l$, тобто $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}_l$. (10)

Таким чином, ми можемо використовувати будь-яку з двох схем $Z_l$ і $Z_m$ для опису будь-якої ситуації рішення, параметричної чи непараметричної.

Більшість ситуацій, що виникають у реальному житті, здаються непараметричними. Однак у багатьох реальних параметричних ситуаціях ємність множини можливих значень параметра $\theta$ менша, ніж ємність множини $C^U$: деякі складні події $\theta(u)$ можуть бути відсутніми. Це робить параметричну ситуацію менш складною. Отже, у нашому Прикладі 2 множина $\Theta$ (сукупність усіх можливих здібностей аспіранта) складається з трьох елементів, тоді як множина $C^U$ складається з двадцяти семи елементів! У виродженому випадку, коли відомо, що випускник є талановитим лише в одному виді діяльності (наприклад, інженерія), невизначеність вибору зникає; складність ситуації мінімальна.

Зрозуміло, що при $m(\Theta) \le m(C^U)$ слід описати ситуацію параметричного рішення з точки зору матричної схеми. Іншими словами, перетворення цієї схеми в схему лотереї може призвести лише до необґрунтованого ускладнення моделі ситуації або до втрати даних про простоту параметричної ситуації. Дійсно, якщо реальна множина параметричної ситуації збережена (не забута) при операції перетворення, то схема лотереї буде складатися з матричної схеми, доповненої марним багатозначним відображенням. Якщо, з іншого боку, після стиснення $\chi$ не зберігаються або забуваються дані про множину $\Theta$, то таке стиснення стає сюр'єкцією множини $Z_m$ на множину $Z_l$: єдина схема лотереї (образ) відповідає більш ніж одній матричній схемі (прообразу).

## 5 Інформація про невідоме.
## Стохастичні закономірності (СЗ) у СПР

Розглянувши приклади ситуацій прийняття рішень та пристосувавши їх до схем прийняття рішень $Z_l$ та $Z_m$, можна побачити, що сама по собі схема є недостатньою для моделювання ситуації. У Прикладах 1 та 2 особа, яка приймає рішення, не лише знає схеми $Z_l$ та $Z_m$, але і отримує додаткові дані про особливості появи наслідків кожного рішення. Ці дані ми називаємо *даними про невідоме*.

Коли ми говоримо «невідоме», ми маємо на увазі, що той, хто приймає рішення, не знає заздалегідь, який наслідок $c \in C_u$ буде результатом обраної дії $u \in U$. Поняття невідомого з усім його багатством ледве може бути сформульовано точною математичною мовою. Тут ми обмежимо своє поводження з невідомим лише певною мірою слідуванням Р. Беллману. А саме, будемо вважати, що наслідок $c \in C_u$ викликається деяким причинно-наслідковим механізмом або генератором наслідків, який вмикається вибраною дією $u \in U$ способом, показаним на рис. 3 для непараметричних ситуацій та на рис.4 для параметричних ситуацій. Саме цей причинно-наслідковий механізм представляє в нашій моделі залежність наслідків від дій, характерну для кожної ситуації прийняття рішень. Зрозуміло, що діапазон цих залежностей дуже широкий, від функціональної залежності до повної незалежності. Природно припустити, що джерелом невідомого є фактичне середовище чи фізична реальність − у найбільш широкому сенсі цього слова − світ, в якій відбувається ситуація прийняття рішень. Так, наприклад, прибуток від операцій на фондовій біржі залежить від сукупності фінансових ринків; результат захворювання залежить від усього стану медицини; тривалість життя людини залежить від соціальних умов, але, звичайно, не тільки від цього.

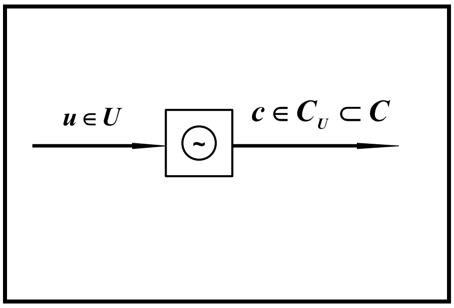



Рисунок 3 − Генератор наслідків для непараметричної ситуації

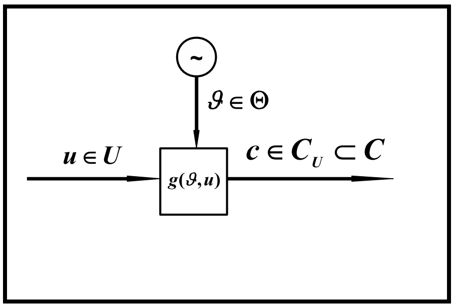



Рисунок 4 − Генератор наслідків для параметричної ситуації

Природно вважати невідомий наслідок $c \in C_u$ випадковим, а причинно-наслідковий механізм − генератором такої випадковості. Специфіка ситуації рішення полягає тоді в певній закономірності розглянутого випадкового явища. Оскільки ці закономірності запропоновані сучасною теорією ймовірностей, то, здавалося б, нових труднощів не повинно бути. Але це не так. Вже Борель зазначає, що світ випадкових явищ набагато ширший, ніж його частина, що описується з точки зору теорії ймовірностей, та зазначає щодо відсутності наукових засобів вивчення цього світу. У цьому відношенні Колмогоров говорить наступне: «Говорячи про випадковість у звичному розумінні цього слова, ми маємо на увазі ті явища, в яких ми не знаходимо закономірностей, що дозволяють передбачити їх поведінку. Взагалі кажучи, немає причин вважати, що явища, випадкові в цьому сенсі, підпорядковані деяким імовірнісним законам. Отже, слід розрізняти випадковість у цьому широкому розумінні та стохастичну випадковість (що є предметом теорії ймовірностей)».

Однак, що означають слова «ми не знаходимо закономірностей, що дозволяють нам передбачити їх поведінку»? Нам ледве слід розуміти їх у тому сенсі, що таких закономірностей не існує, що в діапазоні між детермінізмом функціональної залежності та цілковитою невизначеністю існує лише закономірність стохастичної випадковості. Швидше за все, вони виражають необхідність знайти закономірності нестохастичних випадкових явищ.

Поки незалежно від форми − можливо, навіть нематематичної − в якій виражається закономірність механізму причинно-наслідкових дій, позначимо її символом $I$. Позначимо лотерею та матричні моделі ситуації прийняття рішень через $S_l = (Z_l, I_l)$ і $S_m = (Z_m, I_m)$ відповідно.

## 6 Лотерейна та Матрична моделі СПР. Їх перетворення одна в одну

Ми вже бачили, що матричні та лотерейні схеми, $Z_m$ та $Z_l$, є рівнозначними способами опису ситуацій прийняття рішень: кожну з них можна використовувати для опису параметричної, а також непараметричної ситуації. Здається, що моделі $S_l$ і $S_m$ є рівнозначними і в цьому сенсі: використовуючи операції параметризації $\tau$ і стиснення $\chi$, закономірність $I_m$ може бути переписана через $I_l$ і навпаки. Однак, поки що це можна побачити лише за конкретно заданою закономірністю $I$.

Зокрема, продемонструємо цю еквівалентність моделей $S_m$ та $S_l$ для ситуацій зі скінченими наборами рішень $U$ та наслідками $C$ у разі стохастичної закономірності механізму причинно-наслідкових дій.

Для певної ситуації нехай її модель лотереї буде $S_l = (Z_l, I_l)$, де

$$Z_l = (U, C),$$

$$U = (u_1,u_2,\ldots,u_d),\ C = (c_1,c_2,\ldots,c_t),$$

стохастична закономірність $I_l$ має форму сімейства розподілів ймовірностей

$$I_l = Q = \{Q_k,\ k = \overline{1,d}\}, \qquad Q_k = (q_k(c_1),q_k(c_2),\ldots,q_k(c_t)).$$

Матрична схема $Z_m$, побудована на основі схеми лотереї $Z_l$ за параметризацією τ (6), має вигляд $Z_m = (U, C, \Theta\hat{}, g\hat{}(\bullet,\bullet))$, де штучний параметр $\theta\hat{}$ набуває значення у множині $\Theta\hat{}$, $\mathrm{Card}(\Theta\hat{}) = n = td$,
тобто

$$\Theta\hat{} = (\theta\hat{}_1,\theta\hat{}_2,\ldots,\theta\hat{}_n),\ \theta\hat{}_\mu : U \to^{\mu} C,\ \mu = \overline{1,n},$$

$$\theta\hat{}_\mu(u_k) = g(\theta\hat{}_\mu,u_k), \quad \forall k = \overline{1,d}.$$

Тут $\theta\hat{}_\mu$ − «складна» подія, що складається з «простих» подій $c_{k\nu\mu}$, $\nu = \overline{1,t}$, що становлять $\theta\hat{}_\mu$.

Щоб не ускладнювати наш приклад, припустимо, що не існує залежності між наслідками різних дій, інакше кажучи, що наслідки в цілому незалежні. Тоді закономірність $I_m$ з точки зору розподілу ймовірностей на множині $\Theta\hat{}$ задається як

$$I_m = P(\Theta\hat{}) = (p(\theta\hat{}_1), p(\theta\hat{}_2),\ldots, p(\theta\hat{}_n)), \qquad (11)$$

де

$$p(\theta\hat{}_\mu) = \prod_{k=1}^{d} q_k(c_{\nu\mu k}),\ \mu = \overline{1,n}. \qquad (12)$$

Отримана матрична модель $S_m = (Z_m, I_m)$ еквівалентна вихідній (примітивній) моделі лотереї $S_l = (Z_l, I_l)$. Дійсно, ми робимо обернене перетворення від $S_m$ до $S_l$, стиснення (8). Для цього нам потрібно реконструювати $I_l$ з $I_m$ у вигляді сімейства

$$Q^0{}_k = (q'_k(c_1), q'_k(c_2), \ldots, q'_k(c_t)), \quad k = \overline{1,d}, \qquad (13)$$

де

$$q'_k(c_\nu) = p\left\{\hat{\theta}_\mu, \mu = \overline{1,n} : g(\cdot, u_k) = c_\nu\right\}, \quad \nu = \overline{1,t}. \tag{14}$$

Побудована таким чином модель $S_l = \left(U, C, \left\{C_k, Q'_k, k = \overline{1,d}\right\}\right)$ збігається з вихідною моделлю $S_l$.

Довести цю еквівалентність у випадку довільних множин $C$ і $U$ технічно складніше. Тим не менш, далі ми будемо скрізь, якщо не зазначено інше, записувати модель ситуації прийняття рішень, опускаючи індекси, тобто як $S = (Z, I)$.

## 7 Експерименти в системах прийняття рішень

Припустимо, той, хто приймає рішення, знаходиться в ситуації $S = (Z, I)$. Його знання про закономірність причинно-наслідкового механізму можуть бути збагачені за допомогою спостереження або експерименту над ситуацією прийняття рішень. Опис закономірності перед спостереженням називається *апріорним*. Ми вже позначили його символом $I$. Закономірність, збагачена спостереженням, називається *апостеріорною*, і ми позначаємо її символом $I_h$. Припустимо, що $I$ і $I_h$ пов'язані співвідношенням

$$I_h = f(I, w_h), \qquad w_h \in W_h, \tag{15}$$

де $f$ − деякий алгоритм переходу від апріорного опису закономірності $I$ до післядослідного опису $I_h$ після спостереження $w_h$ з деякого набору $W_h$.

Щоб обмежити визначення експерименту та зробити його більш точним, ми знову повернемося до наших прикладів. Очевидно, що існує два типи експериментів, які проводить особа, що приймає рішення. Експеримент першого типу проводить герой у прикладі 1: ворон повідомляє героя про наслідки, що слідували за рішеннями попередників героя. Експеримент другого типу проводиться в прикладі 2, коли юнак досліджує свої схильності до оволодіння різних професій.

Узагальнюючи сказане, ми визначаємо *модель експерименту першого типу* як відображення

$$h_l: \ C \rightarrow W_{hl}. \tag{16}$$

Це відповідає структурі системи прийняття рішень на рис. 5.

Ми визначаємо *модель експерименту другого типу* як відображення

$$h_m: \ \Theta \rightarrow W_{hm}, \tag{17}$$

що відповідає структурі системи прийняття рішень на рис. 6. Ці цифри дозволяють зрозуміти, що експеримент першого типу може бути проведений як у параметричних, так і в непараметричних ситуаціях. Експеримент другого типу може бути забезпечений лише у параметричних ситуаціях і лише у випадку, де може спостерігатися параметр θ. Статистичні дослідження розглядають насамперед цей тип експерименту.

Існує глибока різниця між двома видами експерименту. Оскільки спостереження $w_m$ залежить лише від параметра $\theta \in \Theta$, спостереження $w_l$ є складнішим. Згідно (16), спостереження $w_l$ залежить від наслідку $c \in C$, а значить, залежить від рішення $u \in U$, що призвело до цього наслідку.

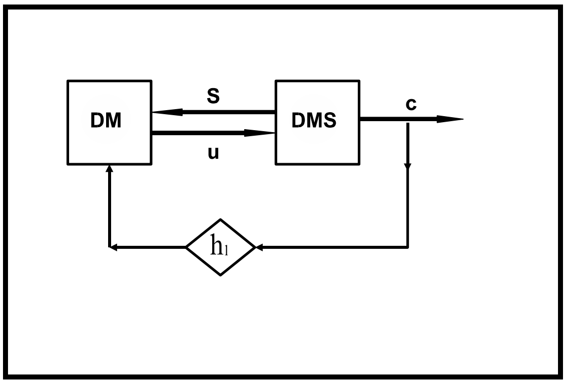



Рисунок 2.5 − Структура системи прийняття рішень з експериментом першого типу

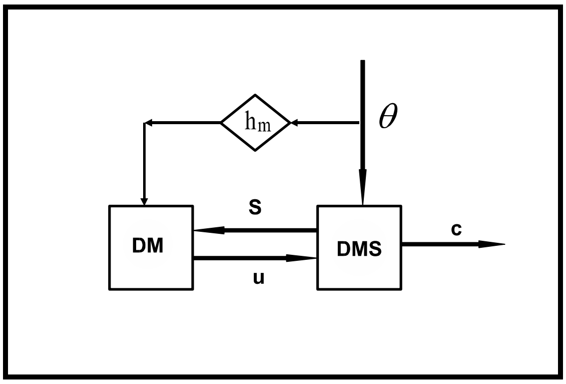



Рисунок 2.6 − Структура системи прийняття рішень з експериментом другого типу

Особа, яка приймає рішення, використовує це спостереження, щоб побудувати апостеріорний опис закономірності. Потім цей опис використовується для подальшого прийняття рішень. Таким чином, виникає залежність між послідовними рішеннями. Такі залежності створюють певну «інформаційну динаміку», особливо важливу в багатоступеневих системах прийняття рішень, тобто у тих, у яких приймаючий рішення приймає послідовнірішення, залишаючись в одній ситуації і накопичуючи, крок за кроком, дані про закономірність механізму причинно-наслідкових дій.

Зазначимо нарешті, що відмова від розгляду випадкових функцій θ у нашій моделі експериментів жодним чином не обмежує загальності цієї моделі. Дійсно, нехай, наприклад, експеримент записується у вигляді випадкової функції θ, тобто як

$$h_m : \Theta\times\Omega \to W_m, \tag{18}$$

де Ω − сукупність примітивних подій. Ця модель завжди може бути зведена до моделі (17) шляхом явної заміни змінних: достатньо розглядати прямий добуток Θ × Ω як новий набір $\Theta'$ невідомого параметра.

## 8 Модель Того хто Приймає Рішення (ТПР)

З розглянутих вище прикладів випливає, що кожен, хто приймає рішення, і який опинився в ситуації прийняття рішення, має на меті досягти того, що є, на його думку, найкращим результатом чи наслідком. Щоб виконати це завдання, той, хто приймає рішення, оснащений математичною моделлю ситуації $S = (Z, I)$, повинен вибрати дію, що породжує цей результат. Цей вибір ми називаємо проблемою рішення або проблемою вибору. Щоб вирішити цю проблему, керівник повинен виконати, грубо кажучи, наступну послідовність кроків:

1. Встановіть своє особисте, власне, відношення переваги (або, іншими словами, критерій) на множині всіх можливих результатів $C$. Позначимо це відношення переваги за допомогою $\beta_C$.
2. Визначте найкращий, згідно $\beta_C$, наслідок $c^0 \in C$.
3. Встановіть деяке відношення переваги (критерій) на множині всіх допустимих дій $U$. Позначимо це відношення переваги $\beta_U$.
4. Визначте найкращу, згідно $\beta_U$, дію $u^0 \in U$.

Ці чотири етапи складають складну проблему рішення, тому що кожен крок у цій послідовності є певною математичною проблемою. Навіть перший крок − встановлення відношення особистих переваг $\beta_C$ – це математична проблема: це відношення повинно задовольняти певним умовам, якщо хочеться залишатися на стабільній землі.

Другий та четвертий кроки − пошук $c^0$ та пошук $u^0$ − є проблемами оптимізації, які, загалом кажучи, можуть бути вирішені відповідними математичними методами. Ці два кроки не є проблемами, характерними лише для прийняття рішень. Проблемою, характерною для прийняття рішень, є проблема третього кроку, а саме проблема побудови відношення переваги $\beta_U$. Ця проблема є ядром складної проблеми прийняття рішень, і тому, говорячи про такі проблеми, ми іноді маємо на увазі *лише проблему третього кроку*.

Тут закономірно зазначити, що дані про закономірність $I$ ситуації можуть лише спростити вирішення проблеми. Тому, слідуючи нашій моделі ситуації прийняття рішень, ми говоримо, що, якщо ми не знаємо нічого про ситуацію, крім схеми $Z$, то обмежуємо модель $S$ ситуації її схемою, тобто $S = Z$. Тим не менш, ситуація не може розглядатися окремо від системи прийняття рішень або, точніше, незалежно від $\beta_C$. Чи не очевидно, що якась ситуація може бути простою для одного, хто приймає рішення, тобто щодо його відношення переваги $\beta_C$, і бути складною для іншого, хто приймає рішення, який має інше відношення переваги $\beta_C$? Припустимо, наприклад, що перший − це кольоровий дальтонік у ситуації, в якій наслідки − це кольори.

Але модель $S$ (або просто схема $Z$) ситуації та відношення переваги $\beta_C$ не визначають єдиного відношення переваги $\beta_U$. Дійсно, це вже було в Прикладі 1, на третьому перехресті, де ми бачили, що два різних героя в одній ситуації, маючи однакові переваги $\beta_C$, пізніше обрали два різних уподобання $\beta_U$ і відповідно прийняли два різних рішення, тобто обрали дві різних дороги. Кожен виправдовує свій вибір по-своєму, і кожен має рацію − по-своєму. Але тоді ми спокушаємося класифікувати ці варіанти як довільні! Для усунення такого свавілля необхідно перетворити третій крок у точну математичну задачу.

Перш ніж це зробити, звернемося знову до наших прикладів. Зокрема, у прикладі 1 на першому перехресті герой оповідання, маючи переваги $\beta_C$ щодо наслідків, приймає рішення без жодних спекуляцій. У цій ситуації прийняття рішень вибір дороги однозначно визначається перевагами героя $\beta_C$, оскільки одному наслідку відповідає лише одна дорога. Ми узагальнюємо цей епізод наступним чином. Розглянемо ситуацію, в якій відображення $\psi(\bullet)$ рішення з множини $U$ у множину $C$ наслідків однозначно. Позначимо таке відображення через $\psi\hat{}$. Зворотне відображення $\psi\hat{}^{-1}$: $C \to U$ не обов'язково однозначне, і наслідок $c \in C$ може бути породжений будь-яким елементом деякої множини $U_{c\in C} \subset U$. Зауважимо, що множини $U_{ci}$ і $U_{cj}$ попарно не перетинаються для всіх $c_i$, $c_j$, $i \neq j$. Таким чином, відображення $\psi\hat{}^{-1}$ розкладає множину рішень $U$ на систему $U\hat{}$ неперервних підмножин $\{U_c,\ c \in C\} = U\hat{}$ таким чином, що $\psi\hat{}^{-1}(c_i)\beta_C\psi\hat{}^{-1}(c_j)$ випливає з $c_i\beta_C c_j$. Таким чином, якщо перевага $\beta_C$ задовольняється для набору зображень $C$, то та сама $\beta_C$ задовольняється для множини зображень $U^{\wedge}$. Але ми позначили відношення переваги на множині символом β. Таким чином, відображення $\psi^{\wedge -1}$ переводить, або проектує, відношення переваги із множини $C$ на множину $U$ таким чином, що якщо $c_i\beta_C c_j$ і $u_{ci} \in U_{ci}$, $u_{cj} \in U_{cj}$, то $\psi^{\wedge}(u_{ci})\beta_C\psi^{\wedge}(u_{cj})$. Зрозуміло, існує єдине відношення переваги $\beta_U$, яке не суперечить відношенню переваги $\beta_C$, або, коротко кажучи, зберігає (або підтримує) $\beta_C$. Ми говоримо, що третій етап такої проблеми рішення є простим або виродженим просто тому, що існує лише одне таке відношення переваги $\beta_U$. Дійсно, у цьому випадку треба вирішити лише оптимізаційну задачу четвертого кроку. Іншими словами, вся складна проблема рішення перероджується в проблему оптимізації.

Тож, можливо, проблема рішення не стає виродженою у випадку, коли відображення ψ(•) є багатозначним, і ми не знаємо, яким буде результат нашої дії. Це часто буває, але не завжди. Ось приклад.

Нехай $C_{u1} = \{c_1, c_2\}$ і $C_{u2} = \{c_3, c_4\}$, а відповідно до $\beta_C$ нехай $c_3\beta_C c_1$, $c_3\beta_C c_2$, $c_4\beta_C c_1$, $c_4\beta_C c_2$, тобто всі результати дії $u_2$ переважають усі результати дії $u_1$. Отже, ми маємо тут багатозначну функцію ψ(•). Але існує єдине $\beta_U$, яке не суперечить $\beta_C$. Це $\beta_U$ робиться за допомогою специфічної комбінації зворотного відображення $\psi^{-1}$(•) (що є сюр’єкцією) та відношення переваги $\beta_C$.

Але перехрестя у другому та третьому епізодах із прикладу 1 відрізняється. Тут, на кожному перехресті, невідомо, який із кількох наслідків відбудеться. З точки зору моделі лотереї, у цій ситуації відображення ψ(•) є багатозначним, і воно таке, що обернене відображення $\psi^{-1}$(•) не існує. Тому відношення переваги героя $\beta_C$ не визначає єдиного відношення переваги $\beta_U$. Ми говоримо, що це ефект невизначеності, властивий ситуації.

І тим не менше, наш герой приймає своє рішення відповідно до свого особистого, тобто довільного, відношення переваги $\beta_U$.

Тепер ми відновимо нашу спробу моделювати третій крок складної проблеми рішення. Позначимо через **S** множину ситуацій рішення. Для будь-якої ситуації рішення $S \in$ **S** нехай $\mathbf{B}_C$ позначає набір усіх відношень переваг $\beta_C$ на $C$, $\mathrm{B}_C$ підмножина $\mathbf{B}_C$, доступна даній особі, що приймає рішення, $\mathbf{B}_U$ набір усіх відносин переваґb на $U$, а $B_U$ підмножина $\mathbf{B}_U$, доступна для особи, яка приймає рішення.

**Означення 1.** Відображення

$$\pi\text{: } \mathbf{S}\times B_C \to B \tag{19}$$

ми називаємо проектором або *правилом вибору критерію*.

Позначимо через $\Pi$ набір усіх можливих проекторів або правил вибору критеріїв $\pi$. Тоді з вищесказаного випливає, що будь-який, хто приймає рішення, в системі рішень по-своєму реагує на інформацію про те, що невідомо, виконуючи по-своєму операцію проектування. Іншими словами, будь-який, хто приймає рішення, в системі прийняття рішень є певним проектором $\pi$, або рівнозначно, має своє правило вибору критеріїв. Це дозволяє нам представляти особу, що приймає рішення, як трійку

$$\Phi = (B_C, B_U, \pi),\ B_C \subseteq \mathrm{B}_C, \qquad B_U \subseteq \mathrm{B}_U, \qquad \pi \subseteq \Pi. \tag{20}$$

Ця модель дозволяє описати вищезазначену довільність таким чином: в одній і тій же ситуації $S$, з однаковими відношеннями переваги $\beta_C$, дві різні особи, що приймають рішення, $\pi_1$ і $\pi_2$, можуть встановити два різних відношення переваги $\beta_{U1}$ і $\beta_{U2}$, які можуть визначити дві різних найкращих дії. Тоді природне питання, хто з них обрав найкращу дію? І що це означає «найкращий», якщо кожен, хто приймає рішення, $\pi_1$ або $\pi_2$, має власну думку, власну проблему оптимізації четвертого кроку, згідно з якою кожен з них визначає своє «найкраще»?

Єдиний вихід з цього свавілля − це, швидше за все, пошук та розміщення в одній групі всіх осіб, що приймають рішення, які мають однакові правила вибору критеріїв. Це усуне свавілля всередині обраної групи або класу: у тій же ситуації рішення $S$ всі представники цього класу, що мають однакове відношення переваги $\beta_C$, встановлять однакове відношення переваги $\beta_U$ і, нарешті, приймуть те саме рішення. Однак, чи існує таке правило вибору критерію? А якщо воно існує, то який критерій $\beta_U$ воно генерує?

Ми не готові відповідати на ці запитання. Проблема вибору виникає, як ми бачили, в системах прийняття рішень з невизначеністю, але ми все ще не маємо точного поняття, що означає існування невизначеності в системі прийняття рішень.

## 9 Невизначеність у СПР. Теорема існування невизначеності

Ми вже кілька разів згадували слово «невизначеність», але поки що ніколи не намагалися зробити його точним. Сенс цього слова в повсякденному мовленні не потребує уточнення. Однак у повсякденному мовленні слово «ймовірно» також не потребує уточнення. Тим не менш, кількісна характеристика ймовірної події вимагає точного математичного методу, а саме теорії ймовірностей. Так само поняття невизначеності вимагає принаймні більш точного визначення. Для початку зверніть увагу, що в теорії рішень треба вміти розділити весь клас проблем прийняття рішень на два підкласи: проблеми рішення з невизначеністю та без них. Для такої класифікації нам потрібен критерій існування невизначеності в системі прийняття рішень. Перш ніж ввести такий критерій, ми зробимо кілька зауважень.

Є дві частини системи прийняття рішень, які можуть бути джерелами невизначеності: особа, яка приймає рішення, та ситуація прийняття рішення. Ми припускаємо, що той, хто приймає рішення, може виявити невизначеність лише у виборі відношення переваги $\beta_C$. Тож давайте обмежимось тими системами прийняття рішень, для яких будь-хто, хто приймає рішення, може мати єдине особисте відношення переваги $\beta_C$ для даної ситуації. У цьому випадку, коли $\beta_C$ визначено, ситуація рішення стає єдиним джерелом невизначеності в системі прийняття рішень, а отже, і відповідної проблеми рішення.

Зауважте, що інформація $I$ може лише зменшити невизначеність ситуації. Згідно з цими припущеннями, невизначеність у системі прийняття рішень виходить лише із схеми $Z$ ситуації.

Для спрощення наших міркувань обмежимо встановлену множину $\mathbf{B}_C$ лінійними уподобаннями (лінійне впорядкування) та позначимо

$$\beta_C = (C, =\succ).$$

Нехай

$$Z = Z_l = (C,\ U,\ \psi(\bullet)).$$

Позначимо

$$\mathrm{K} = (2^C)^U,$$

тобто сукупність усіх відображень $\psi$: $U \rightarrow 2^{\mathrm{C}}$.

Позначимо клас відображень, що вносять невизначеність у систему прийняття рішень через $K \subseteq \mathrm{K}$.

**Означення 2.** Ми говоримо, що рішення $u_1$ має перевагу над рішенням $u_2$ щодо $\beta_C = (C, =\succ)$, якщо $C_{u1} \succ C_{u2}$, тобто $u_1 \succ u_2$ якщо $c_1 =\succ c_2$ $\forall c_1 \in C_{u1}$ та
$\forall c_2 \in C_{u2}$, $\mathrm{Card}(C_{u1} \cap C_{u2}) \le 1$, $C_{u1} \ne C_{u2}$.

**Означення 3.** Процедура побудови відношення переваги $\beta_U = (U, =\succ)$ називається *проектуванням* , якщо відповідає таким умовам:

Умова 1.

$$C_{u1} \succ C_{u2} \Rightarrow u_1 \succ u_2,\ \forall u_1, u_2 \in U;$$

Умова 2.

$$(C_{u1} = C_{u2},\ \mathrm{Card}(C_{u1}) = 1) \Rightarrow u_1 \sim u_2, \qquad \forall u_1, u_2 \in U.$$

**Означення 4.** Система прийняття рішень містить невизначеність, якщо процедура проектування не є однозначною.

Очевидно, що багатозначність відображення $\psi(\bullet)$ є необхідною умовою існування невизначеності, тобто $\mathrm{K} \ne (2^C)^U$. Але зрозуміло, що ця умова не є достатньою, тобто $K \ne (2^C)^U \setminus C^U$.

Інтуїтивно можна легко запропонувати якусь версію достатньої умови. Припустимо для простоти, що множини $U$ і $C$ скінченні, а відображення $\psi$ однозначне скрізь, окрім однієї дії $u^* \in U$. На цьому етапі нехай множина наслідків задається $C_{u*} = \{c_1, c_2\}$, $c_1 \prec c_2$. Припустимо, існує дія $u^{**}$ з наслідком $C_{u**} = \{c_3\}$ така, що $c_1 \prec c_3 \prec c_2$. Тоді існують два варіанти відношення переваги

$\beta_U$: перше $\beta_U^{(1)}$ з $u^* \succ u^{**}$, а друге $\beta_U^{(2)}$ з $u^* \prec u^{**}$. Тож, достатня умова може бути сформульована так: невизначеність існує, якщо є ситуація $S = Z$ і якщо є пара рішень $u^*$, $u^{**}$ з наслідками $C_{u*} = \{c_1, c_2\}$ і

$C_{u**} = \{ c_3\}$ така, що $c_1 \prec c_3 \prec c_2$.

Але виявляється, що можна довести набагато сильніше твердження. Для визначення класу $K$ нам потрібно довести наступну лему.

**Лема 1.** Маємо $\psi(\bullet) \in K$, якщо існує відношення переваги $(C, =\succ)$ і різні $u_1, u_2 \in U$ і наслідки $c_1, c_2 \in \psi(u_1)$, $c_3, c_4 \in \psi(u_2)$ такі, що $c_1 \prec c_3$ , $c_2 \succ c_4$.

*Доведення.* <u>Необхідність.</u> Нехай деяке відношення $(C, =\succ)$ породжує різні проекції на множину $U$. Припустимо зворотне.

Це означає, що для всіх $u_1, u_2 \in U$, $u_1 \neq u_2$ виконується саме одна з таких умов:

$$\psi(u_1) \prec \psi(u_2), \qquad \mathrm{Card}(\psi(u_1) \cap \psi(u_2)) \leq 1,$$
$$\psi(u_1) \succ \psi(u_2), \qquad \mathrm{Card}(\psi(u_1) \cap \psi(u_2)) \leq 1,$$
$$\psi(u_1)=\psi(u_2), \qquad \mathrm{Card}(\psi(u_1))= 1.$$

Тоді для обраних $(C, \succ)$, згідно з умовами 1 і 2, існує унікальне $(U, \succ)$, а саме $u_1 \succ u_2 \Leftrightarrow \psi(u_1) \succ \psi(u_2)$, для всіх $u_1, u_2 \in U$ . Це суперечить припущенню, що відношення $(C, =\succ)$ породжує різні проекції на множині $U$. Іншими словами, це суперечить неоднозначності вибору відношенню переваги на множині рішень $U$.

<u>Достатність.</u> Нехай відношення переваги $(C, \succ)$ задовольняє умовам леми 1. Тоді існують $u', u'' \in U$, $u' \neq u''$, $c_1, c_2 \in \psi(u')$, $c_3, c_4 \in \psi(u'')$ такі, що $c_1 \prec c_3$, $c_2 \succ c_4$. Нехай $(U, =\succ')$ є деяким відношенняv переваги на $U$ (наприклад, це може бути лексикографічне відношення відносно $(C, =\succ)$). Тоді можна взяти інше відношення переваги $(U, =\succ'')$ таке, що

$$u_1 =\succ'' u_2 \Leftrightarrow u_1 =\succ' u_2;$$

$$u_1 =\prec' u_2,\ u_1 =\prec u_2.$$

Лема доведена.

Далі нам потрібна наступна лема.

**Лема 2.** Необхідні та достатні умови еквівалентні наступним умовам: повинні існувати різні $u_1$, $u_2 \in U$ та наслідки $c_1$, $c_2 \in \psi(u_1)$, $c_3$, $c_4 \in \psi(u_2)$, такі що або $c_1 \prec c_3 \prec c_2$ або $c_1 = c_3$, $c_2 = c_4$, $c_1 \neq c_2$.

*Доведення.* Необхідність. Припустимо, що умови леми 1 задовольняються для $u_1$, $u_2$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$. Тоді без втрати загальності можна припустити, що $c_1 =\prec c_2$. Якщо $c_1 = c_2$, то задаючи $c_1' = c_4$, $c_3' = c_4' = c_1$, $c_2' = c_3$, отримаємо для $c_1'$, $c_2'$, $c_3'$, $c_4'$ першу умову леми 2. Якщо $c_1 \prec c_2$, то при $c_3 \succ c_2$, при $c_1' = c_4$, $c_2' = c_3$, $c_3' = c_2$, $c_4' = c_1$ ми знову отримуємо першу умову леми 2. Те ж саме, якщо $c_3 \prec c_2$. У випадку $c_3 = c_2$, якщо $c_1 = c_4$ маємо при $c_1' = c_1$, $c_2' = c_2$, $c_3' = c_3$, $c_4' = c_4$, другу умову леми 2. І нарешті, якщо $c_1 \neq c_4$, наприклад, при $c_4 \succ c_1$, то при $c_1' = c_1$, $c_2' = c_2$, $c_3' = c_4$, $c_4' = c_3$ маємо другу умову леми 2.

Достатність. Нехай умови леми 2 використовуються для $u_1$, $u_2$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$. Тоді якщо $c_1 \prec c_3 \prec c_4$, умова леми 1 виконується для $c_1' = c_1$, $c_2' = c_2$, $c_3' = c_4'$, $c_4' = c_3$, а якщо $c_1 = c_3 \succ c_2 = c_4$, то для $c_1'$ виконується умова леми 1 $c_1' = c_2$, $c_2' = c_1$, $c_3' = c_3$, $c_4' = c_4$. Лема доведена.

З цих двох лем отримаємо таку теорему.

**Теорема 2.** Схема рішення $Z_l$ містить невизначеність, якщо $\psi(\bullet)$ така, що можна визначити різні $u_1$, $u_2 \in \mathrm{Dom}(\psi)$ і $c_1$, $c_2$ такі, що або $\psi(u_1) = \psi(u_2) = \{c_1, c_2\}$ або існує також $c_3$, відмінний від $c_1$ і $c_2$, такий, що $c_1$, $c_2 \in \psi(u_1)$ і $c_3 \in \psi(u_2)$.

Нехай $Z = Z_m = (\Theta, U, C, g(\bullet,\bullet))$, і ця $Z_m$ еквівалентна $Z_l$ у значенні теореми 1. Тоді теорему 2 можна переформулювати для $Z_m$ наступним чином.

**Теорема 3.** Схема рішення $Z_m$ містить невизначеність тоді і тільки тоді, коли існує $g(\bullet,\bullet)$ така, що існують різні $u_1$, $u_2 \in U$, для яких або $g(\Theta, u_1) = g(\Theta, u_2)$, і $\mathrm{Card}(g(\Theta, u_1)) = 2$ або є $\theta_1$, $\theta_2 \in \Theta$ такі, що $g(\theta_1, u_1) \neq g(\theta_2, u_1) \neq g(\theta_1, u_2) = =g(\theta_2, u_2)$.

Іншими словами, ці умови визначають клас $K$ таких схем $Z$, для яких існує $\beta_C \in \mathbf{B}_C$, таке, що можна спроектувати пару $(\beta_C, Z)$ у більш, ніж одне відношення переваги $\beta_U$, тобто у більш, ніж один критерій вибору найкращої дії.

## 10 Правило вибору критеріїв

Тепер ми можемо повернутися до центрального, третього, етапу складеної проблеми рішення , а саме до побудови відношення переваги $\beta_U$, або іншими словами, критерію вибору найкращого рішення. Ми вже знаємо, що ця проблема стає нетривіальною, якщо ситуація з рішенням містить невизначеність. Ми вже бачили, що в будь-якій системі прийняття рішень існує невизначеність, якщо для заданого відношення переваги $\beta_C$ існує схема $Z$ ситуації прийняття рішень така, що існує більше, ніж одне відношення переваги $\beta_U$, тобто існує більше, ніж один критерій вибору оптимального рішення. Іншими словами, у цьому випадку відображення (19) є багатозначним, і той, хто приймає рішення, може вибрати один із декількох критеріїв, керуючись його особистими смаками. Як відомо, доповнення схеми прийняття рішень $Z$ закономірністю $I$ механізму причин-наслідків взагалі не виключає невизначеності та виникаючої довільності у системі прийняття рішень. Щоб усунути це свавілля, потрібно підпорядкувати проектор $\pi$ деяким умовам. У певному сенсі ці умови, або аксіоми, можуть розглядатися як аксіоматичний опис, або модель того, хто приймає рішення. З іншого боку, ці умови визначають клас проекторів або осіб, які приймають рішення, такий, що в одній і тій же ситуації рішення $S$, маючи однакове відношення переваги $\beta_C$, проектують пару $(S, \beta_C)$ у спільне відношення переваги $\beta_U$. Таким чином, на четвертому кроці складеної проблеми рішення вони виберуть те саме оптимальне рішення.

Для подальшого виконання цього завдання необхідно зробити множину $B_C$ та множину $B_U$ спільними для всіх осіб, що приймають рішення, і які ми збираємося розмістити в одному класі. Для цього можна припустити, наприклад, що $B_C = \mathbf{B}_C$ і $B_U = \mathbf{B}_U$, де $\mathbf{B}_C$ і $\mathbf{B}_U$ − всі можливі відношення переваги на множинах $C$ і $U$ відповідно.

Що стосується умов, накладених на правило вибору критеріїв, або на проектор $\pi$, то зараз не ясно, чи можна зустріти такі умови в нашій досить загальній постановці проблеми рішення, тобто з точки зору переваг. Однак для певних обмежень щодо класу ситуацій прийняття рішень були досягнуті суттєві результати у цьому напрямку. Ці результати складають сьогоднішнє озброєння теорії рішень.

Перше суттєве обмеження полягає в тому, що замість відношення уподобань $B$ в якості критерію впорядкування множин $C$ і $U$ використовуються дійсні функції. В економіці ці функції називаються функціями корисності, а в техніці їх називають функціями втрат. Це обмеження було достатнім, щоб запропонувати аксіоматичний опис чотирьох класів проекторів, які вивели чотири критерії (Вальда, Севиджа, Гурвіца та Лапласа) однозначно для матричної схеми $Z_m$, тобто для матричної ситуації $S_m$ із повною невизначеністю.

## 11 Лінійна функція корисності (ФК). Теорема фон Неймана-Моргенштерна

Однак центральним результатом, основою сучасної теорії рішень та її застосувань, особливо в економіці, є теорема очікуваної корисності. Ця теорема відігравала головну роль у мікроекономіці з 1940-х років. Тому ми розглянемо це з деякими коментарями, але без доказів.

Припустимо, що в системі прийняття рішень існує непараметрична стохастична ситуація $S_l = (Z_l, I_l)$, де $Z_l = (C, U, \{C_u\ \forall u \in U\})$ і закономірність причинно-наслідкового механізму $I_l$ − сімейство стохастичних розподілів
$\{Q_u, \forall u \in U\}$ на множині $C$. Нехай той, хто приймає рішення, вибере якесь досконале, рефлексивне та транзитивне бінарне відношення переваги
$\beta_C = (C, =\succ) \in B_C$, яке впорядковує набір наслідків $C$.

**Означення 5.** Дійсна функція $\mathbf{U}$, визначена в упорядкованому наборі $C$, є функцією корисності, якщо вона є монотонною, тобто, якщо для всіх пар $(c_i, c_j)$,

$$c_i =\succ c_j \Longleftrightarrow \mathbf{U}(c_i) \geq \mathbf{U}(c_j). \quad (21)$$

Щоб не ускладнювати це обговорення, ми обмежимо подання цього результату моделями ситуації рішення зі скінченими наборами рішень $U$ та наслідками $C$. Тоді, наприклад, індекси $i$ впорядкованих наслідків $c_1 =\succ c_2 =\succ \ldots =\succ c_t$,

$\mathbf{U}(c_i) = i$, $i = 1,2, ..., t$, можуть слугувати функцією корисності. Таким чином, замість пари ($S$, $\beta_C$) маємо пару ($S$, $\mathbf{U}(\bullet)$). Але нам потрібно побудувати критерій вибору оптимального рішення, тобто функцію корисності рішень $\mathbf{U}\hat{}(\bullet)$. Для цього спочатку зауважимо, що множина розподілів ймовірностей $Q = \{Q_u, u \in$ U} є гомеоморфною для набору рішень $U$, тобто $Q_{ui} \succ Q_{uj}$, тоді і лише тоді, коли $u_i \succ u_j$. Тому множина розподілів ймовірностей $Q$ або набір лотерей може замінити множину $U$. Припустимо, що особа, яка приймає рішення, хотіла б, щоб її функція корисності щодо рішень була лінійною для множини $Q$ (тобто, для множини $U$). Для задоволення цього бажання відношення переваги на $Q$ повинно відповідати наступним умовам:

**Умова 1.** За будь-яких $Q_1$, $Q_2$, $Q_3 \in Q$, $\alpha \in [0,1]$ множини

$$\{\alpha: \alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2 \succeq Q_3\} \text{ та } \{\alpha: Q_3 \succeq \alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2\} \text{ замкнені.}$$

**Умова 2.** За будь-яких $Q_1$, $Q_2$, $Q_3 \in Q$, $Q_1 \sim Q_2$, та $\alpha$, $0 \le \alpha \le 1$,

$$\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_3 \cong \alpha Q_2+(1-\alpha)Q_3.$$

Перша умова − це умова неперервності відношення переваги на $Q$. Друга -– умова незалежності відношення переваги на $Q$. Обидві ці умови, що передають бажання того, хто приймає рішення, мати лінійну функцію корисності рішення, є суто математичні і можуть бути спільними для багатьох осіб, які приймають рішення. Але які умови можна охарактеризувати як специфічні для певної групи осіб, що приймають рішення? Інтуїтивно зрозуміло, що відношення переваги на множині лотерей $Q$ повинно відповідати відношенню переваги щодо множини наслідків $C$. Одну таку умову можна записати, грубо кажучи, у такій формі:

**Умова 3.** Якщо $c_1 \succeq c_2$, тоді

$$Q=\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) \succeq Q'=\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ q_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 \\ q_2' \end{pmatrix}\right), \tag{22}$$

якщо $q_1 > q_1'$.

Тобто той, хто приймає рішення, віддає перевагу лотереї, в якій найкращий наслідок має найбільшу ймовірність.

Тепер ми маємо таку теорему.

**Теорема 4.** Для того щоб існувала лінійна функція корисності **U**ˆ(u)

у вигляді $$\mathbf{U}\hat{}(u) = \sum_{c \in C} \mathbf{U}(c) q_u(c), \qquad (23)$$

необхідно і достатньо, щоб у множині $U$ були виконані умови 1–3. Функція корисності (23) єдина з точністю до монотонного строго зростаючого лінійного перетворення.

Корисність (23) називається *очікуваною корисністю*. Можна переформулювати теорему 4 з точки зору матричної ситуації. Очікувана функція корисності в цьому випадку така

$$\mathbf{U}\hat{}(u) = \sum_{\theta \in \Theta} \mathbf{U}(g(\theta, u)) p(\theta), \qquad (24)$$

де $p(\theta)$ та $g(\theta, u)$ знаходимо відповідно до формул (12) та (5) відповідно.

Іншими словами, в наших рамках умови (або аксіоми) 1–3 описують конкретне правило вибору критеріїв або клас $\Pi_0$ проекторів (або осіб, які приймають рішення) $\pi$. Усі особи, які приймають рішення з цього класу, в такій же самій ситуації приймали б рішення, припускаючи наступне

$$\sum_{c \in C} \mathbf{U}(c) q_{u1}(c) \geq \sum_{c \in C} \mathbf{U}(c) q_{u2}(c) \Longleftrightarrow u_1 =\succ u_2. \qquad (25)$$

Зауважимо також, що всі умови (аксіоми) теореми 4 передбачають, що закономірність механізму причинно-наслідкового механізму ситуацій рішення є стохастичною закономірністю у вигляді сімейства розподілів ймовірностей

$I = \{Q_u,\ u \in U\}$. Таким чином, відношення переваги (25) має сенс лише для повторюваних чи масових рішень при стохастичній закономірності.

Нагадаємо, однак, що (25) має місце лише при дуже великій кількості (нескінченній) рішень у тій же ситуації. Коли приймається єдине рішення, наслідок є випадковим з розподілом ймовірності, що відповідає обраному рішенню. Це означає, що наслідок одного вибору рішення $u_1$ може бути гіршим, ніж наслідок одного вибору рішення $u_2$. Те ж саме стосується всіх критеріїв, що належать до так званої групи критеріїв неочікуваної корисності, де розподіл ймовірності за наслідками використовується так чи інакше.

Здається, що єдиним, хто може цього уникнути, є той, що приймає рішення за критерієм Вальда, який іноді називають принципом гарантованого результату. У цьому випадку найкраще рішення має вигляд:

$$u^0 = \arg \min_u \max_\theta L. \tag{26}$$

Іншими словами, особа, яка приймає рішення, не використовує ніякої інформації про регулярність механізму причинно-наслідкових дій. Однак, коли в цій ситуації рішення приймаються багаторазово (або масово), тобто, багато хто приймає рішення, але лише один раз або одним керівником, така поведінка чи ставлення видаються менш розумними.

Масовий характер рішень в аксіоматиці очікуваної корисності передбачається закономірністю механізму причинно-наслідкових дій у вигляді розподілу ймовірностей. А саме, третя аксіома (Умова 3) відображає цей психологічний елемент, вимагаючи від особи, яка приймає рішення, віддавати перевагу тому рішенню, де найбільшу ймовірність має найкорисніший наслідок. З цього приводу сказано: «Після того, як ви ввели ймовірності в визначення та вимірювання комунальних послуг, ви уклали торг з чортом, і ви вже не зможете їх позбутися».

## 12 Випадковість в широкому розумінні

Ми можемо запитати, чи можемо ми винайти таку аксіоматику правил вибору критеріїв, згідно з якими масовий характер рішень не спирається на закономірність механізму причинно-наслідкових наслідків. Можливо, таким чином ми зможемо отримати критерій, який підходить для прийняття рішень у ситуаціях із закономірностями масових явищ, відмінних від стохастичних. Але чи є такі закономірності, і що ми знаємо про них?

Щоб відповісти на це запитання, спробуємо спочатку інтуїтивно зрозуміти, які явища природно вважати випадковими. Найрізноманітніша різниця між випадковими і не випадковими явищами полягає в тому, що коли ми називаємо якесь явище випадковим, це завжди означає, що ми не знаємо закономірностей (назвемо їх локальними), які дозволяли б передбачити поведінку явища. Вивчення випадкового явища може бути двояким: можна звести його до невипадкового, шукаючи його локальні закономірності, і можна, якщо це масове випадкове явище, спробувати знайти його глобальні, статистичні закономірності, тобто закономірності асимптотичної поведінки середніх значень різних характеристик явища. Наприклад, це можуть бути частоти певних наслідків, арифметичні середні значення певних функціоналів тощо. Такі випадкові явища розумно називати *нестохастичними*. Це має місце, наприклад, для зростаючого середнього життя людини: для новонародженої дитини ймовірність досягнення 60 років має тенденцію до зростання, завдяки успіхам медицини та гігієни. Сьогодні таких прикладів можна виявити в надлишку у економіці та фінансах: часові ряди індексів цін на акції, процентні ставки, товари, валютні курси тощо.

Природно вважати випадковими в широкому розумінні всі масові явища, які вивчаються лише в межах своїх статистичних закономірностей. Ще раз, якщо особа, яка приймає рішення, опинилася в ситуації з нестохастичною випадковістю, вона не може використовувати критерій оптимальності з теореми 4. Для цього є дві причини. По-перше, аксіоми цієї теореми, тобто визначення класу $\Pi_0$ проекторів, істотно використовують закономірність стохастичної випадковості. По-друге, вона не знає, чи існує закономірність нестохастичного випадкового явища.

Тому з’являються дві нові проблеми. По-перше, необхідно встановити існування закономірності явищ, що є випадковими в широкому розумінні. По-друге, необхідно знайти аксіоматичний опис класу $\Pi_1$ осіб, що приймають рішення, які враховували б лише масовий характер випадкового явища, але не його закономірність.

## 13 Приклад непараметричної задачі прийняття рішень

### Постановка задачі та її формалізація

Маємо задачу прийняття рішення для компанії, яка займається виробництвом і реалізацією засобів захисту рослин та насіння. Компанія вирішує провести маркетингову акцію «Страхування озимих посівів» для залучення більшої кількості клієнтів. Для участі у програмі потрібно придбати і використати насіння озимої культури, яке пропонує компанія, на загальній площі не менше, ніж 100 га. При вимиранні культури взимку компанія надає безкоштовно насіння кукурудзи відповідно до площі вимирання. Компанія має три варіанти культур, для яких може бути проведена акція:

1) Озимий ріпак
2) Озима пшениця
3) Озимий ячмінь

Група експертів оцінила кількість людей (відповідно до існуючих клієнтів), яка може бути залучена при проведенні акцій для даних культур та ймовірність такої кількості учасників:

| Культура | Кількість залучених клієнтів | Ймовірність залучення |
|---|---|---|
| *Озимий ріпак* | 59 | 0,5 |
| | 67 | 0,3 |
| | 79 | 0,2 |
| *Озима пшениця* | 80 | 0,55 |
| | 100 | 0,2 |
| | 117 | 0,25 |
| *Озимий ячмінь* | 47 | 0,3 |
| | 59 | 0,3 |
| | 72 | 0,4 |

Дохід у даному випадку буде розраховуватися:

$$R = k(A \cdot pw \cdot rw - a \cdot ps \cdot rs)$$

де $k$ – кількість залучених клієнтів,

$A$ – середня площа висіву озимої культури одним хазяйством (га),

$pw$ – маржинальна виручка з продажу насіння озимої культури (грн. за посівну одиницю),

$rw$ – норма висіву озимої культури (посівна одиниця на га),

$a$ – середня площа вимирання озимої культури,

$ps$ – маржинальна виручка з продажу насіння кукурудзи (грн. за посівну одиницю),

$rs$ – норма висіву кукурудзи (посівна одиниця на га)

Складемо таблицю розрахунку доходу.

| Культура | $k$ | $A$ | $pw$ | $rw$ | $a$ | $ps$ | $rs$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Озимий ріпак* | 59 | 3500 | 212 | 0,4 | 670 | 276 | 1,6 | 54752 |
| | 67 | 3500 | 212 | 0,4 | 670 | 276 | 1,6 | 62176 |
| | 79 | 3500 | 212 | 0,4 | 670 | 276 | 1,6 | 73312 |
| *Озима пшениця* | 80 | 8000 | 235 | 0,2 | 850 | 276 | 1,6 | 51200 |
| | 100 | 8000 | 235 | 0,2 | 850 | 276 | 1,6 | 64000 |
| | 117 | 8000 | 235 | 0,2 | 850 | 276 | 1,6 | 74880 |
| *Озимий ячмінь* | 47 | 6000 | 148 | 0,2 | 400 | 276 | 1,6 | 45120 |
| | 59 | 6000 | 148 | 0,2 | 400 | 276 | 1,6 | 56640 |
| | 72 | 6000 | 148 | 0,2 | 400 | 276 | 1,6 | 69120 |

Тоді наша таблиця буде виглядати наступним чином:

| Культура | Кількість залучених клієнтів | Ймовірність залучення | Дохід (тис. грн.) |
|---|---|---|---|
| *Озимий ріпак* | 59 | 0,5 | 55 |
| | 67 | 0,3 | 62 |
| | 79 | 0,2 | 73 |
| *Озима пшениця* | 80 | 0,55 | 51 |
| | 100 | 0,2 | 64 |
| | 117 | 0,25 | 75 |
| *Озимий ячмінь* | 47 | 0,3 | 45 |
| | 59 | 0,3 | 57 |
| | 72 | 0,4 | 69 |

За допомогою цієї інформації ми можемо формально описати нашу непараметричну ситуацію за допомогою лотерейної моделі:

$S_l = (Z_l, I_l)$

де $Z_l = (D, C, \psi(\cdot))$ – лотерейна схема

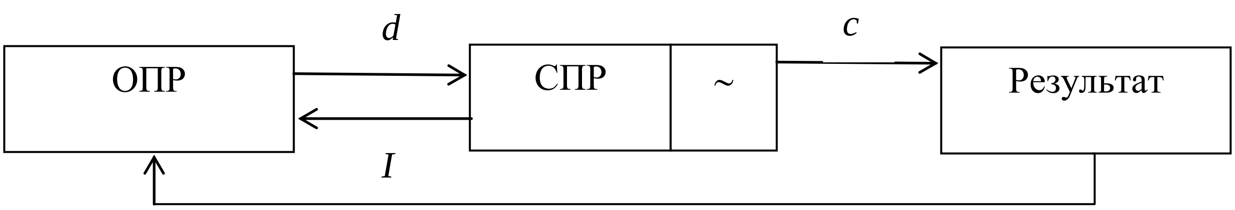
$D$ – множина можливих рішень або дій

$C$ – множина всіх можливих наслідків

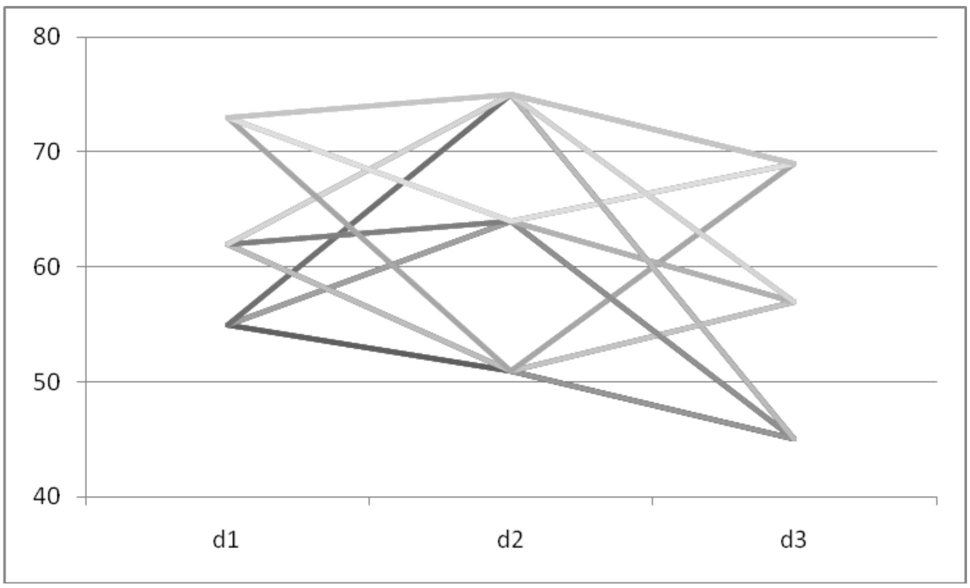
$\psi: D \to 2^C \backslash \{\emptyset\}, \psi(d) = C_d$ – структура причинно-наслідкових зв’язків у ситуації прийняття рішень у вигляді багатовимірного відображення

$I_l$ – інформація щодо причинно-наслідкового механізму генерації наслідків згідно з лотерейною моделлю (якась задана величина або регулярність механізму, доступна для особи, що приймає рішення, у момент, в який це рішення приймається)

Схематично непараметричну задачу можна зобразити наступним чином:




Для нашої задачі діями є “озимий ріпак” ($d_1$), “озима пшениця” ($d_2$), “озимий ячмінь” ($d_3$), а наслідками – відповідні очікувані прибутки. Побудуємо множину відображень даної ситуації:



**Перехід від непараметричної моделі до параметричної**

Матрична параметрична ситуація має вигляд:

$S_m = (Z_m, I_m)$

де $Z_m = (\Theta, D, C, g(\cdot))$ – матрична схема

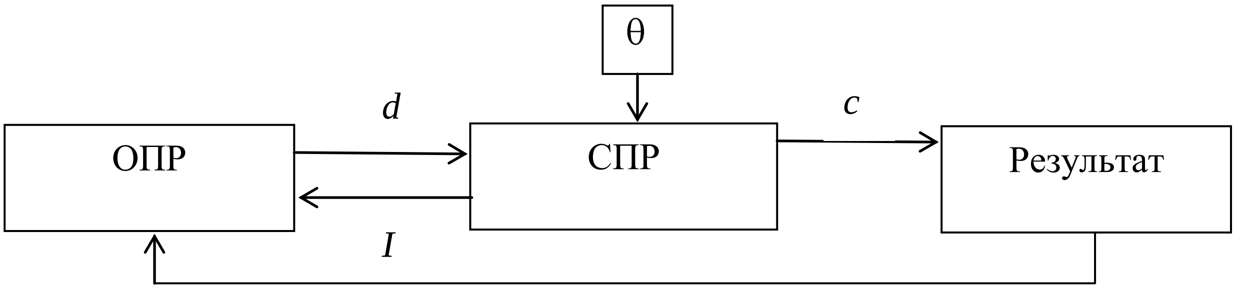
$D$ – множина можливих рішень або дій

$C$ – множина всіх можливих наслідків

$g: \Theta \times D \to C$ – модель причинно-наслідкового механізму ситуації прийняття рішень у вигляді функції двох змінних

$I_m$ – якась задана величина або регулярність механізму, доступна для особи, що приймає рішення, у момент, в який це рішення приймається

Схематично параметричну задачу можна зобразити наступним чином:




Непараметрична модель, як було визначено раніше, має наступний вигляд:

$S_l = (Z_l, I_l)$

де $Z_l = (D, C, \psi(\cdot))$ – лотерейна схема

$D$ – множина можливих рішень або дій

$C$ – множина всіх можливих наслідків

$\psi: D \to 2^C$ – модель причинно-наслідкового механізму ситуації прийняття рішень у вигляді багатовимірного відображення

$I_l$ – якась задана величина або регулярність механізму, доступна для особи, що приймає рішення, у момент, в який це рішення приймається

Для опису даної непараметричної ситуації як матричної схеми, необхідно побудувати множину $\Theta$ і відображення $g(\cdot,\cdot)$ таким чином, щоб зберегти «складність» вихідної лотерейної схеми.

Зауважуючи те, що у відповідь на обрану дію $d \in D$ причинно-наслідковий механізм генерує тільки один наслідок $c \in C_d$, ми відображаємо складність вихідної непараметричної ситуації як множину всіх складних випадків:

$$\hat{\Theta} = \left\{\hat{\theta} \in (D \to C): \hat{\theta}(d) \in C_d, \forall d \in D\right\}$$

де $\hat{\theta}(\cdot)$ – функція однієї змінної з областю визначення $D$

Встановивши

$$\hat{\theta}(d) = \hat{g}(\hat{\theta}, d)$$

ми отримаємо матричну схему $\hat{Z}_m = (\hat{\Theta}, D, C, \hat{g}(\cdot,\cdot))$, в якій, на відміну від матричної схеми $Z_m = (\Theta, D, C, g(\cdot,\cdot))$, яка описує деяку параметричну ситуацію, параметр $\hat{\theta}$ є штучним і може не мати фізичного вираження.

Така процедура перетворення непараметричної ситуації в параметричну називається параметризацією.

Якщо застосувати процедуру параметризації до нашої вихідної задачі і врахувати те, що для отримання значення ймовірності штучного параметра, ймовірності відповідних наслідків перемножуються, то отримаємо:

| Дія / Параметр | *d1* | *d2* | *d3* | *p*(θ) |
|---|---|---|---|---|
| θ1 | 55 | 51 | 45 | 0,0825 |
| θ2 | 55 | 51 | 57 | 0,0825 |
| θ3 | 55 | 51 | 69 | 0,11 |
| θ4 | 55 | 64 | 45 | 0,03 |
| θ5 | 55 | 64 | 57 | 0,03 |
| θ6 | 55 | 64 | 69 | 0,04 |
| θ7 | 55 | 75 | 45 | 0,0375 |
| θ8 | 55 | 75 | 57 | 0,0375 |
| θ9 | 55 | 75 | 69 | 0,05 |
| θ10 | 62 | 51 | 45 | 0,0495 |
| θ11 | 62 | 51 | 57 | 0,0495 |
| θ12 | 62 | 51 | 69 | 0,066 |
| θ13 | 62 | 64 | 45 | 0,018 |
| θ14 | 62 | 64 | 57 | 0,018 |
| θ15 | 62 | 64 | 69 | 0,024 |
| θ16 | 62 | 75 | 45 | 0,0225 |
| θ17 | 62 | 75 | 57 | 0,0225 |

| Дія<br>Параметр | *d1* | *d2* | *d3* | *p*(θ) |
|---|---|---|---|---|
| θ18 | 62 | 75 | 69 | 0,03 |
| θ19 | 73 | 51 | 45 | 0,033 |
| θ20 | 73 | 51 | 57 | 0,033 |
| θ21 | 73 | 51 | 69 | 0,044 |
| θ22 | 73 | 64 | 45 | 0,012 |
| θ23 | 73 | 64 | 57 | 0,012 |
| θ24 | 73 | 64 | 69 | 0,016 |
| θ25 | 73 | 75 | 45 | 0,015 |
| θ26 | 73 | 75 | 57 | 0,015 |
| θ27 | 73 | 75 | 69 | 0,02 |

**Перехід від параметричної моделі до непараметричної**

Матричну схему $Z_m$ завжди можна привести до вихідної лотерейної схеми $Z_l$. Визначимо багатовимірне відображення $\psi(\cdot)$, користуючись наступним правилом:

$$\psi(d) = \{\hat{g}(\hat{\theta}, d) : \hat{\theta} \in \hat{\Theta}\} \quad \forall d \in D$$

Ця процедура називається стисканням.

Тепер потрібно перенести інформацію. При дії $d_i$ наслідок $c_j$ наступає при будь-якому значенні параметра $\theta_k$, для якого $g(\theta_k, d_i) = c_j$. Тому варто встановити між розподілами $\theta_d$ і $P$ таку залежність

$$\forall c_j, d_i: \quad \theta_{d_i}(c_j) = P\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right), \qquad \theta_k : g(\theta_k, d_i) = c_j.$$

Так як розглядається ситуація в даний конкретний період часу, то має місце лише одне з значень параметра $\theta$, тому справедлива рівність:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k).$$

Тобто, при здійсненні проектування $(\theta, d, c) \to (d, c)$, отримаємо такі рівності:

1) $\hat{g}(\theta 1, d1) = \hat{g}(\theta 2, d1) = \hat{g}(\theta 3, d1) = \hat{g}(\theta 4, d1) = \hat{g}(\theta 5, d1) = \hat{g}(\theta 6, d1) = \hat{g}(\theta 7, d1) = \hat{g}(\theta 8, d1) = \hat{g}(\theta 9, d1) = c1$

2) $\hat{g}(\theta 10, d1) = \hat{g}(\theta 11, d1) = \hat{g}(\theta 12, d1) = \hat{g}(\theta 13, d1) = \hat{g}(\theta 14, d1) = \hat{g}(\theta 15, d1) = \hat{g}(\theta 16, d1) = \hat{g}(\theta 17, d1) = \hat{g}(\theta 18, d1) = c2$

3) $\hat{g}(\theta 19, d1) = \hat{g}(\theta 20, d1) = \hat{g}(\theta 21, d1) = \hat{g}(\theta 22, d1) = \hat{g}(\theta 23, d1) = \hat{g}(\theta 24, d1) = \hat{g}(\theta 25, d1) = \hat{g}(\theta 26, d1) = \hat{g}(\theta 27, d1)$

4) $\hat{g}(\theta 1, d2) = \hat{g}(\theta 2, d2) = \hat{g}(\theta 3, d2) = \hat{g}(\theta 10, d2) = \hat{g}(\theta 11, d2) = \hat{g}(\theta 12, d2) = \hat{g}(\theta 19, d2) = \hat{g}(\theta 20, d2) = \hat{g}(\theta 21, d2) = c4$

5) $\hat{g}(\theta 4, d2) = \hat{g}(\theta 5, d2) = \hat{g}(\theta 6, d2) = \hat{g}(\theta 13, d2) = \hat{g}(\theta 14, d2) = \hat{g}(\theta 15, d2) = \hat{g}(\theta 22, d2) = \hat{g}(\theta 23, d2) = \hat{g}(\theta 24, d2) = c5$

6) $\hat{g}(\theta 7, d2) = \hat{g}(\theta 8, d2) = \hat{g}(\theta 9, d2) = \hat{g}(\theta 16, d2) = \hat{g}(\theta 17, d2) = \hat{g}(\theta 18, d2) = \hat{g}(\theta 25, d2) = \hat{g}(\theta 26, d2) = \hat{g}(\theta 27, d2) = c6$

7) $\hat{g}(\theta 1, d3) = \hat{g}(\theta 4, d3) = \hat{g}(\theta 7, d3) = \hat{g}(\theta 10, d3) = \hat{g}(\theta 13, d3) = \hat{g}(\theta 16, d3) = \hat{g}(\theta 19, d3) = \hat{g}(\theta 22, d3) = \hat{g}(\theta 25, d3) = c7$

8) $\hat{g}(\theta 2, d3) = \hat{g}(\theta 5, d3) = \hat{g}(\theta 8, d3) = \hat{g}(\theta 11, d3) = \hat{g}(\theta 14, d3) = \hat{g}(\theta 17, d3) = \hat{g}(\theta 20, d3) = \hat{g}(\theta 23, d3) = \hat{g}(\theta 26, d3) = c8$

9) $\hat{g}(\theta 3, d3) = \hat{g}(\theta 6, d3) = \hat{g}(\theta 9, d3) = \hat{g}(\theta 12, d3) = \hat{g}(\theta 15, d3) = \hat{g}(\theta 18, d3) = \hat{g}(\theta 21, d3) = \hat{g}(\theta 24, d3) = \hat{g}(\theta 27, d3) = c9$

Отже, будуємо відображення $\psi(\cdot)$

$$\psi(d_1) = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$$\psi(d_2) = \{c_4, c_5, c_6\}$$

$$\psi(d_3) = \{c_7, c_8, c_9\}$$

Тепер перенесемо інформацію: розподіл $P$ на $\Theta$ перенесемо на розподіли $Q_{d_i}$ та $C_{d_i}$. Застосуємо формулу:

$$\forall c_j, d_i \; q_{d_i}(c_j) = \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k), \quad \theta_k : g(\theta_k, d_i) = c_j$$

Отримаємо:

1) $q_{d1}(c1) = P(c1, c4, c7) + P(c1, c4, c8) + P(c1, c4, c9) + P(c1, c5, c7) + P(c1, c5, c8) + P(c1, c5, c9) + P(c1, c6, c7) + P(c1, c6, c8) + P(c1, c6, c9) = 0{,}5$

2) $q_{d1}(c2) = P(c2, c4, c7) + P(c2, c4, c8) + P(c2, c4, c9) + P(c2, c5, c7) + P(c2, c5, c8) + P(c2, c5, c9) + P(c2, c6, c7) + P(c2, c6, c8) + P(c2, c6, c9) = 0{,}3$

3) $q_{d1}(c3) = P(c3, c4, c7) + P(c3, c4, c8) + P(c3, c4, c9) + P(c3, c5, c7) + P(c3, c5, c8) + P(c3, c5, c9) + P(c3, c6, c7) + P(c3, c6, c8) + P(c3, c6, c9) = 0{,}2$

4) $q_{d2}(c4) = P(c1, c4, c7) + P(c1, c4, c8) + P(c1, c4, c9) + P(c2, c4, c7) + P(c2, c4, c8) + P(c2, c4, c9) + P(c3, c4, c7) + P(c3, c4, c8) + P(c3, c4, c9) = 0{,}55$

5) $q_{d2}(c5) = P(c1, c5, c7) + P(c1, c5, c8) + P(c1, c5, c9) + P(c2, c5, c7) + P(c2, c5, c8) + P(c2, c5, c9) + P(c3, c5, c7) + P(c3, c5, c8) + P(c3, c5, c9) = 0{,}2$

6) $q_{d2}(c6) = P(c1, c6, c7) + P(c1, c6, c8) + P(c1, c6, c9) + P(c2, c6, c7) + P(c2, c6, c8) + P(c2, c6, c9) + P(c3, c6, c7) + P(c3, c6, c8) + P(c3, c6, c9) = 0{,}2$

7) $q_{d3}(c7) = P(c1, c4, c7) + P(c1, c5, c7) + P(c1, c6, c7) + P(c2, c4, c7) + P(c2, c5, c7) + P(c2, c6, c7) + P(c3, c4, c7) + P(c3, c5, c7) + P(c3, c6, c7) = 0{,}3$

8) $q_{d3}(c8) = P(c1, c4, c8) + P(c1, c5, c8) + P(c1, c6, c8) + P(c2, c4, c8) + P(c2, c5, c8) + P(c2, c6, c8) + P(c3, c4, c8) + P(c3, c5, c8) + P(c3, c6, c8) = 0{,}3$

9) $q_{d3}(c9) = P(c1,c4,c9) + P(c1,c5,c9) + P(c1,c6,c9) + P(c2,c4,c9) + P(c2,c5,c9) + P(c2,c6,c9) + P(c3,c4,c9) + P(c3,c5,c9) + P(c3,c6,c9) = 0,3$

Тобто, застосувавши цю процедуру до нашої задачі та зауваживши, що для отримання “стиснутої” ймовірності наслідків, ми повинні додати відповідні ймовірності штучного параметру, отримаємо нашу вихідну лотерейну задачу:

| | | |
|---|---|---|
| d1 | 55 | 0,5 |
| | 62 | 0,3 |
| | 73 | 0,2 |
| d2 | 51 | 0,55 |
| | 64 | 0,2 |
| | 75 | 0,25 |
| d3 | 45 | 0,3 |
| | 57 | 0,3 |
| | 69 | 0,4 |

## 14 Приклад параметричної задачі прийняття рішень

### Постановка задачі та її формалізація

Маємо задачу прийняття рішення для інвестиційної компанії, яка хоче розмістити кошти клієнта у цінні папери. Компанія має вибір із трьох видів цінних паперів:

1. Облігації внутрішньої державної позики (ОВДП)
2. Корпоративні облігації
3. Акції підприємств

У процесі реалізації кожної стратегії інвестування можливі три варіанти розвитку подій в економіці:

1)Економічна криза

2)Стабільність

3)Економічне зростання

Група експертів зробила прогноз річних доходів (тис. грн.) для кожної стратегії та оцінила ймовірності розвитку економіки:

| Стратегії інвестування | Криза | Стабільність | Зростання |
|---|---|---|---|
| *ОВДП* | 56 | 61 | 120 |
| *Корпоративні облігації* | 36 | 58 | 147 |
| *Акції підприємств* | 12 | 72 | 211 |
| Ймовірність розвитку економіки | 0,35 | 0,50 | 0,15 |

Для нашої задачі діями є “ОВДП” ($d_1$), “корпоративні облігації” ($d_2$), “акції підприємств” ($d_3$), наслідками – відповідні очікувані річні доходи, параметром є розвиток економіки: “криза” ($\theta_1$), “стабільність” ($\theta_2$), “зростання” ($\theta_3$).

| Параметр / Дія | θ1 | θ2 | θ3 |
|---|---|---|---|
| *d1* | 56 | 61 | 120 |
| *d2* | 36 | 58 | 147 |
| *d3* | 12 | 72 | 211 |
| p(θ) | 0,35 | 0,5 | 0,15 |

**Перехід від параметричної моделі до непараметричної**

Дана матрична модель:

$$M_m = \{Z_m, P\},$$

яка складається з матричної схеми:

$$Z_m = \left(\Theta, D, C, g(\cdot,\cdot)\right),$$

$$g: \Theta \times D \rightarrow C$$

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\},\ D = \{d_1, d_2, d_3\}, \mathrm{C} = \{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3\}$$

та інформації *P*.

Необхідно перетворити її в лотерейну модель:

$$M_l = \{Z_l, Q\},$$

яка складається з лотерейної схеми:

$$Z_l = (D, C, \psi(\cdot)),$$
$$\forall\, d \in D: \psi(d) = C_d \in C$$

та інформації $Q$.

Для цього потрібно побудувати відображення $\psi(\cdot)$. Визначимо багатовимірне відображення $\psi(\cdot)$, користуючись наступним правилом:

$$\psi(d) = \{\hat{g}(\hat{\theta}, d): \hat{\theta} \in \hat{\Theta}\} \quad \forall d \in D$$

Тепер потрібно перенести інформацію. При дії $d_i$ наслідок $c_j$ наступає при будь-якому значенні параметра $\theta_k$, для якого $g(\theta_k, d_i) = c_j$. Тому варто встановити між розподілами $\theta_d$ і $P$ таку залежність

$$\forall c_j, d_i: \quad \theta_{d_i}(c_j) = P\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right), \qquad \theta_k: g(\theta_k, d_i) = c_j.$$

Оскільки розглядається ситуація в даний конкретний період часу, то має місце лише одне з значень параметра $\theta$, тому справедлива рівність:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k).$$

Будуємо відображення $\psi(\cdot)$

$$\psi(u_1) = \{c_1, c_2, c_3\}$$
$$\psi(u_2) = \{c_4, c_5, c_6\}$$
$$\psi(u_3) = \{c_7, c_8, c_9\}$$

| Наслідок / Дія | *c1* | *c2* | *c3* |
|---|---|---|---|
| *d1* | 56 | 61 | 120 |
| *d2* | 36 | 58 | 147 |
| *d3* | 12 | 72 | 211 |

Тепер за формулою:

$$\forall c_j, d_i\ q_{d_i}(c_j) = \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k), \quad \theta_k : g(\theta_k, d_i) = c_j$$

перенесемо інформацію.

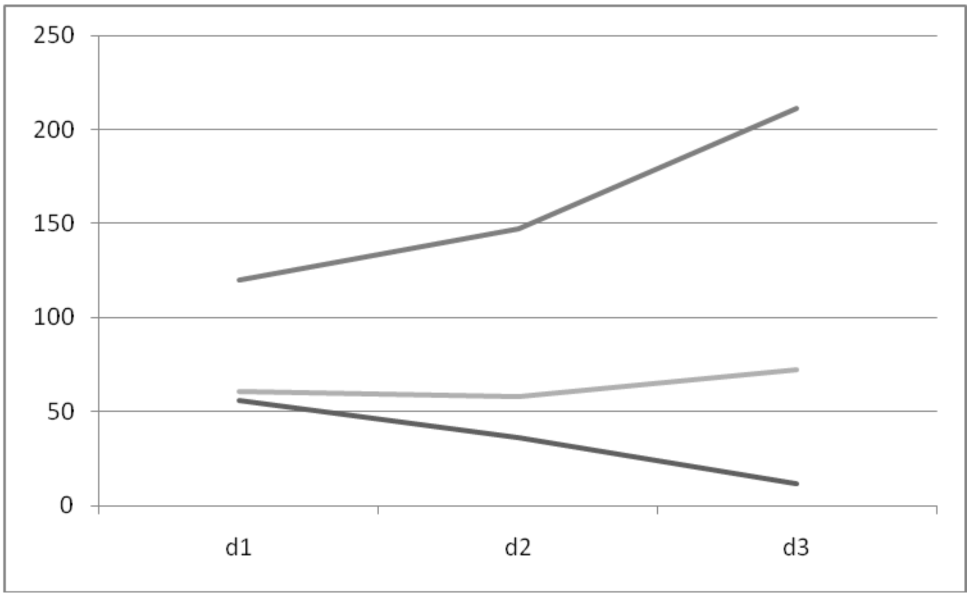
Отримаємо такі дискретні розподіли

$Q_{d1} = \{0{,}35;\ 0{,}5;\ 0{,}15\}$

$Q_{d2} = \{0{,}35;\ 0{,}5;\ 0{,}15\}$

$Q_{d3} = \{0{,}35;\ 0{,}5;\ 0{,}15\}$

Графічно це можна зобразити так:




**Перехід від непараметричної моделі до параметричної**

Маємо лотерейну модель непараметричної ситуації:

$M_l = \{Z_l, Q\}$,

яка складається з лотерейної схеми:

$$Z_l = (D, C, \psi(\cdot)), \forall\, d \in D : \psi(d) = C_d \in C$$

та інформації:

$$Q = \{Q_d, d \in D\}.$$

Потрібно побудувати матричну модель:

$M_m = \{Z_m, P\}$,

яка складається з матричної схеми:

$$Z_m = \left(\boldsymbol{\Theta}, D, C, g(\cdot,\cdot)\right), g: \boldsymbol{\Theta} \times \mathrm{D} \to \mathrm{C}$$

та інформації $P$, що є розподілом ймовірностей на $\Theta$.

$D$ і $C$ дані за умовою, треба знайти $\Theta$, $g(\cdot,\cdot)$ та $P$ на $\Theta$.

$\Theta$ і $g(\cdot,\cdot)$ мають задовольняти умову:

$\forall d \in D, \forall c \in \psi(d)\ \exists\, \theta \in \boldsymbol{\Theta}: g(\theta, d) = c.$

Тобто кожне значення параметру $\theta$ можна приймати як елемент декартового добутку підмножин наслідків, які відповідають кожній дії:

$C_{d_1} \times C_{d_2} \times C_{d_3} \to \Theta.$

Знайдемо множину $\Theta$:

$$\Theta = \{(c_1,c_1,c_1),(c_1,c_1,c_2),(c_1,c_1,c_3),(c_1,c_2,c_1),(c_1,c_2,c_2),(c_1,c_2,c_3),\\ (c_1,c_3,c_1),(c_1,c_3,c_2),(c_1,c_3,c_3),(c_2,c_1,c_1),(c_2,c_1,c_2),(c_2,c_1,c_3),\\ (c_2,c_2,c_1),(c_2,c_2,c_2),(c_2,c_2,c_3),(c_2,c_3,c_1),(c_2,c_3,c_2),(c_2,c_3,c_3),\\ (c_3,c_1,c_1),(c_3,c_1,c_2),(c_3,c_1,c_3),(c_3,c_2,c_1),(c_3,c_2,c_2),(c_3,c_2,c_3),\\ (c_3,c_3,c_1),(c_3,c_3,c_2),(c_3,c_3,c_3)\}.$$

Відображення $g: \Theta \times D \to C$ та перенесення інформації за формулою

$$P(\theta_j) = \prod_{i=1}^{3} P(g(\theta_j, d_i))$$

можна представити у вигляді таблиці:

| Дія / Параметр | d1 | d2 | d3 | p(θ) |
|---|---|---|---|---|
| θ1 | 56 | 36 | 12 | 0,0429 |
| θ2 | 56 | 36 | 72 | 0,0613 |
| θ3 | 56 | 36 | 211 | 0,0184 |
| θ4 | 56 | 58 | 12 | 0,0613 |
| θ5 | 56 | 58 | 72 | 0,0875 |
| θ6 | 56 | 58 | 211 | 0,0263 |
| θ7 | 56 | 147 | 12 | 0,0184 |
| θ8 | 56 | 147 | 72 | 0,0263 |
| θ9 | 56 | 147 | 211 | 0,0079 |
| θ10 | 61 | 36 | 12 | 0,0613 |
| θ11 | 61 | 36 | 72 | 0,0875 |
| θ12 | 61 | 36 | 211 | 0,0263 |
| θ13 | 61 | 58 | 12 | 0,0875 |
| θ14 | 61 | 58 | 72 | 0,1250 |

| Дія / Параметр | d1 | d2 | d3 | p(θ) |
|---|---|---|---|---|
| θ15 | 61 | 58 | 211 | 0,0375 |
| θ16 | 61 | 147 | 12 | 0,0263 |
| θ17 | 61 | 147 | 72 | 0,0375 |
| θ18 | 61 | 147 | 211 | 0,0113 |
| θ19 | 120 | 36 | 12 | 0,0184 |
| θ20 | 120 | 36 | 72 | 0,0263 |
| θ21 | 120 | 36 | 211 | 0,0079 |
| θ22 | 120 | 58 | 12 | 0,0263 |
| θ23 | 120 | 58 | 72 | 0,0375 |
| θ24 | 120 | 58 | 211 | 0,0113 |
| θ25 | 120 | 147 | 12 | 0,0079 |
| θ26 | 120 | 147 | 72 | 0,0113 |
| θ27 | 120 | 147 | 211 | 0,0034 |

Умова $\sum P_i(\theta_i) = 1$ виконана. Це означає, перехід від лотерейної моделі до матричної було здійснено без втрат інформації. В результаті отримана матрична модель, яка відрізняється від вихідної кількістю параметрів. Це пояснюється тим, що кожній лотерейній моделі відповідає множина еквівалентних матричних. Тобто ми отримали не вихідну множину параметрів, а множину всіх теоретично можливих значень параметра.

## 15 Приклади прийняття рішень в умовах повної невизначеності та ризику

### Прийняття рішень за критерієм Вальда

Критерій Вальда є критерієм крайнього песимізму, оскільки статистик вважає, що «природа» діє проти нього найгіршим чином. Це критерій гарантованого результату. Критерій Вальда забезпечує максимізацію мінімального виграшу або, що теж саме, мінімізацію максимального програшу (втрат), який може виникнути при реалізації однієї зі стратегій. Цей критерій орієнтує ОПР дотримуватися вкрай обережної поведінки. Така поведінка прийнятна, наприклад, коли гравець не має зацікавленості в крупному виграші, але хоче себе застрахувати від неочікуваних програшів. Вибір такої поведінки визначається відношенням гравця до ризику. Критерій Вальда застосовують у тих випадках, коли необхідно забезпечити успіх в будь-якій ситуації.

Визначимо найкраще рішення за критерієм Вальда для першої задачі.

| Дія / Параметр | d1 | d2 | d3 |
|---|---|---|---|
| θ1 | 55 | 51 | 45 |
| θ2 | 55 | 51 | 57 |
| θ3 | 55 | 51 | 69 |
| θ4 | 55 | 64 | 45 |
| θ5 | 55 | 64 | 57 |
| θ6 | 55 | 64 | 69 |
| θ7 | 55 | 75 | 45 |
| θ8 | 55 | 75 | 57 |
| θ9 | 55 | 75 | 69 |
| θ10 | 62 | 51 | 45 |
| θ11 | 62 | 51 | 57 |
| θ12 | 62 | 51 | 69 |
| θ13 | 62 | 64 | 45 |
| θ14 | 62 | 64 | 57 |
| θ15 | 62 | 64 | 69 |
| θ16 | 62 | 75 | 45 |
| θ17 | 62 | 75 | 57 |
| θ18 | 62 | 75 | 69 |
| θ19 | 73 | 51 | 45 |
| θ20 | 73 | 51 | 57 |
| θ21 | 73 | 51 | 69 |
| θ22 | 73 | 64 | 45 |
| θ23 | 73 | 64 | 57 |
| θ24 | 73 | 64 | 69 |
| θ25 | 73 | 75 | 45 |
| θ26 | 73 | 75 | 57 |
| θ27 | 73 | 75 | 69 |
| min | 55 | 51 | 45 |

$$\max\{55,51,45\} = 55$$

Отже, компанія обере дію 1, тобто буде проводити акцію для озимого ріпаку, що може з більшою вірогідністю принести найбільший прибуток, який в той самий час буде меншим за найбільші прибутки від проведення акції на двох інших культурах.

Визначимо найкраще рішення за критерієм Вальда для другої задачі.

| Параметр / Дія | θ1 | θ2 | θ3 | min |
|---|---|---|---|---|
| *d1* | 56 | 61 | 120 | 56 |
| *d2* | 36 | 58 | 147 | 36 |
| *d3* | 12 | 72 | 211 | 12 |

max {56,36,12} = 56.

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 1 і вкладе гроші в облігації внутрішньої державної позики, які є найбільш надійними, але в той самий час принесуть найменший прибуток в разі зростання економіки.

**Прийняття рішень за критерієм крайнього оптимізму**

Критерій оптимізму, який ще називають критерієм максимаксу, використовують коли особа, що приймає рішення орієнтується на найбільш сприятливі умови. У випадку, коли гру задано матрицею виграшів за критерієм оптимізму визначається варіант рішення, який максимізує максимальні виграші (наприклад, доходи) для кожного варіанта ситуації. У випадку, коли гру задано матрицею програшів за критерієм оптимізму визначається варіант рішення, який мінімізує мінімальні програші (наприклад, витрати) для кожного варіанта ситуації. Критерій оптимізму доцільно застосовувати у тих випадках, коли статистик має можливість впливати на вибір стратегій гравцем «природа».

Застосувавши до першої задачі критерій крайнього оптимізму отримаємо:

| Дія / Параметр | *d1* | *d2* | *d3* |
|---|---|---|---|
| θ1 | 55 | 51 | 45 |
| θ2 | 55 | 51 | 57 |
| θ3 | 55 | 51 | 69 |
| θ4 | 55 | 64 | 45 |
| θ5 | 55 | 64 | 57 |
| θ6 | 55 | 64 | 69 |
| θ7 | 55 | 75 | 45 |
| θ8 | 55 | 75 | 57 |

| Дія / Параметр | *d1* | *d2* | *d3* |
|---|---|---|---|
| θ9 | 55 | 75 | 69 |
| θ10 | 62 | 51 | 45 |
| θ11 | 62 | 51 | 57 |
| θ12 | 62 | 51 | 69 |
| θ13 | 62 | 64 | 45 |
| θ14 | 62 | 64 | 57 |
| θ15 | 62 | 64 | 69 |
| θ16 | 62 | 75 | 45 |
| θ17 | 62 | 75 | 57 |
| θ18 | 62 | 75 | 69 |
| θ19 | 73 | 51 | 45 |
| θ20 | 73 | 51 | 57 |
| θ21 | 73 | 51 | 69 |
| θ22 | 73 | 64 | 45 |
| θ23 | 73 | 64 | 57 |
| θ24 | 73 | 64 | 69 |
| θ25 | 73 | 75 | 45 |
| θ26 | 73 | 75 | 57 |
| θ27 | 73 | 75 | 69 |
| max | 73 | 75 | 69 |

$$\max\{73,75,69\} = 75$$

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 2 і проведе маркетингову акцію для озимої пшениці, яка може принести найбільший прибуток компанії, але в той самий час є найбільш ризиковою і дасть невеликий виграш за несприятливих умов.

Застосувавши до другої задачі критерій крайнього оптимізму отримаємо:

| Параметр / Дія | θ1 | θ2 | θ3 | max |
|---|---|---|---|---|
| *d1* | 56 | 61 | 120 | 120 |
| *d2* | 36 | 58 | 147 | 147 |
| *d3* | 12 | 72 | 211 | 211 |

$$\max\{120,147,211\} = 211$$

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 3 і вкладе гроші в акції підприємств, які дають найбільший виграш за сприятливих умов, але в той же час є найбільш ненадійними і дадуть мінімальний виграш при економічній кризі**.**

**Прийняття рішень за критерієм Севіджа**

Виникають ситуації, в яких неконтрольовані фактори діють більш приємним чином у порівнянні зі становищем, на яке орієнтується підприємець. Наприклад, погодні умови виявилися краще прогнозованих; конкуренція зменшилась на ринку у порівнянні з прогнозованими очікуваннями. У цих умовах виникає необхідність визначення можливих відхилень отриманих результатів від їх оптимальних значень. У цьому випадку застосовують критерій Севіджа.

Цей критерій аналогічний критерію Вальда, але використовується не матриця виграшів, а матриця ризиків (недоотримання). За критерієм Севіджа кращим є рішення, при якому максимальне значення ризику буде найменшим, тобто minmax().

Сформуємо матрицю втрат для першої задачі за формулою $c_{ij} = x_{i,max} - x_{ij}$ , де $c_{ij}$ – втрати:

| Дія / Параметр | *d1* | *d2* | *d3* |
|---|---|---|---|
| θ1 | 18 | 24 | 24 |
| θ2 | 18 | 24 | 12 |
| θ3 | 18 | 24 | 0 |
| θ4 | 18 | 11 | 24 |
| θ5 | 18 | 11 | 12 |
| θ6 | 18 | 11 | 0 |
| θ7 | 18 | 0 | 24 |
| θ8 | 18 | 0 | 12 |
| θ9 | 18 | 0 | 0 |
| θ10 | 11 | 24 | 24 |
| θ11 | 11 | 24 | 12 |
| θ12 | 11 | 24 | 0 |
| θ13 | 11 | 11 | 24 |
| θ14 | 11 | 11 | 12 |
| θ15 | 11 | 11 | 0 |
| θ16 | 11 | 0 | 24 |

| Дія / Параметр | d1 | d2 | d3 |
|---|---|---|---|
| θ17 | 11 | 0 | 12 |
| θ18 | 11 | 0 | 0 |
| θ19 | 0 | 24 | 24 |
| θ20 | 0 | 24 | 12 |
| θ21 | 0 | 24 | 0 |
| θ22 | 0 | 11 | 24 |
| θ23 | 0 | 11 | 12 |
| θ24 | 0 | 11 | 0 |
| θ25 | 0 | 0 | 24 |
| θ26 | 0 | 0 | 12 |
| θ27 | 0 | 0 | 0 |
| max | 18 | 24 | 24 |

$$\min\{18,24,24\} = 18$$

Отже, компанія обере дію 1 і проведе маркетингову акцію для озимого ріпаку, який є найбільш надійними і принесе найменші втрати.

Сформуємо матрицю втрат для другої задачі за формулою $c_{ij} = x_{i,max} - x_{ij}$ , де $c_{ij}$ – втрати:

| Параметр / Дія | θ1 | θ2 | θ3 | max |
|---|---|---|---|---|
| *d1* | 64 | 59 | 0 | 64 |
| *d2* | 111 | 89 | 0 | 111 |
| *d3* | 199 | 139 | 0 | 199 |

$$\min\{64,111,199\} = 64$$

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 1 і вкладе гроші в облігації внутрішньої державної позики, які є найбільш надійними і принесуть найменші втрати.

**Прийняття рішень за критерієм Гурвіца**

Критерій Гурвіца рекомендує в процесі прийняття рішення використовувати певний середній результат, що характеризує стан між крайнім песимізмом і крайнім оптимізмом.

У випадку, коли гру задано матрицею виграшів, за критерієм Гурвіца перевага віддається варіанту рішення, яке визначається максимумом серед лінійних комбінацій мінімального і максимального виграшів:

$$H = \max_i \left\{ \lambda \min_j x_{ij} + (1-\lambda) \max_j x_{ij} \right\}$$

Коефіцієнт λ можна розглядати як показник песимізму-оптимізму.

При λ = 0 критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, тобто орієнтація на граничний ризик, оскільки великий виграш спрягається з великим ризиком. При λ = 1 критерій Гурвіца співпадає з критерієм Вальда, тобто орієнтація на обережну поведінку. Тому критерій Гурвіца ще називають критерієм узагальненого максиміну.

Значення λ є проміжними між ризиком і обережністю і вибирається із суб'єктивних (інтуїтивних) міркувань в залежності від конкретних умов та схильності до ризику ОПР.

Припустимо, що λ = 0,6, тобто ОПР не досить схильний до ризику.

Зробимо розрахунки для першої задачі

| Дія | d1 | d2 | d3 |
|---|---|---|---|
| max | 73 | 75 | 69 |
| min | 55 | 51 | 45 |
| $\boldsymbol{\lambda \min_j x_{ij} + (1-\lambda) \max_j x_{ij}}$ | 62,2 | 60,6 | 54,6 |

max{62,2;60,6;54,6} = 62,2

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 1 і проведе маркетингову акцію для озимого ріпаку, який максимально відповідати показнику ризикованості ОПР.

Зробимо аналогічні розрахунки для другої задачі.

| Параметр / Дія | max | min | $\boldsymbol{\lambda \min_j x_{ij} + (1-\lambda) \max_j x_{ij}}$ |
|---|---|---|---|
| *d1* | 120 | 56 | 81,6 |
| *d2* | 147 | 36 | 80,4 |
| *d3* | 211 | 12 | 91,6 |

$$\max\{81,6;80,4;91,6\} = 91,6$$

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 3 і вкладе гроші в акції підприємств, які будуть максимально відповідати показнику ризикованості ОПР.

**Прийняття рішень за критерієм Лапласа**

Критерій Лапласа використовується при умові, коли ймовірності можливих станів систем невідомі, тобто в умовах повної невизначеності. Даний критерій базується на використанні принципу недостатнього обґрунтування, який стверджує, що стани системи *S*1, *S*2, … , *Sm* мають рівні ймовірності. Враховуючи вище сказане, початкову задачу можна розглядати як задачу прийняття рішень в умовах ризику, коли вибирається альтернатива *ai*, яка дає найбільш очікуваний виграш *Ri* (коли *V*(*ai*,*Sj*) моделює прибуток) або найменший очікуваний програш *Ri* (коли *V*(*ai*, *Sj*) моделює витрати).

Отже, для знаходження величини *R1* має місце:

$$R = \max_i \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} V(x_i, S_j) \right\}$$

де 1/*m* – ймовірність реалізації стану .

Даний критерій доцільно використовувати в тих випадках, коли різниця між окремими станами системи велика, тобто велика дисперсія значень.

Зробимо розрахунки для першої задачі.

| Дія / Параметр | *d1* | *d2* | *d3* | *p*(θ) |
|---|---|---|---|---|
| θ1 | 55 | 51 | 45 | 0,0825 |
| θ2 | 55 | 51 | 57 | 0,0825 |
| θ3 | 55 | 51 | 69 | 0,11 |
| θ4 | 55 | 64 | 45 | 0,03 |
| θ5 | 55 | 64 | 57 | 0,03 |
| θ6 | 55 | 64 | 69 | 0,04 |
| θ7 | 55 | 75 | 45 | 0,0375 |
| θ8 | 55 | 75 | 57 | 0,0375 |
| θ9 | 55 | 75 | 69 | 0,05 |

| Дія / Параметр | *d1* | *d2* | *d3* | *p*(θ) |
|---|---|---|---|---|
| θ10 | 62 | 51 | 45 | 0,0495 |
| θ11 | 62 | 51 | 57 | 0,0495 |
| θ12 | 62 | 51 | 69 | 0,066 |
| θ13 | 62 | 64 | 45 | 0,018 |
| θ14 | 62 | 64 | 57 | 0,018 |
| θ15 | 62 | 64 | 69 | 0,024 |
| θ16 | 62 | 75 | 45 | 0,0225 |
| θ17 | 62 | 75 | 57 | 0,0225 |
| θ18 | 62 | 75 | 69 | 0,03 |
| θ19 | 73 | 51 | 45 | 0,033 |
| θ20 | 73 | 51 | 57 | 0,033 |
| θ21 | 73 | 51 | 69 | 0,044 |
| θ22 | 73 | 64 | 45 | 0,012 |
| θ23 | 73 | 64 | 57 | 0,012 |
| θ24 | 73 | 64 | 69 | 0,016 |
| θ25 | 73 | 75 | 45 | 0,015 |
| θ26 | 73 | 75 | 57 | 0,015 |
| θ27 | 73 | 75 | 69 | 0,02 |
| Середнє значення | 63,3 | 63,3 | 57,0 | |
| Математичне сподівання | 60,7 | 59,6 | 58,2 | |

$$\max\{60,7;59,6;58,2\} = 60,7$$

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 1 і і проведе маркетингову акцію для озимого ріпаку, який дає найбільший середній результат.

Зробимо розрахунки для другої задачі.

| Параметр / Дія | θ1 | θ2 | θ3 | Середнє значення | Математичне сподівання |
|---|---|---|---|---|---|
| *d1* | 56 | 61 | 120 | 79,0 | 68,1 |
| *d2* | 36 | 58 | 147 | 80,3 | 63,7 |
| *d3* | 12 | 72 | 211 | 98,3 | 71,9 |
| p(θ) | 0,35 | 0,5 | 0,15 | | |

$$\max\{68,1;63,7;71,9\} = 71,9$$

З цього можна зробити висновок, що компанія обере дію 3 і вкладе гроші в акції підприємств, які дають найбільший середній результат.

Для прийняття остаточного рішення варто порівняти результати, які ми отримали, користуючись всіма критеріями.

Зробимо це для першої та для другої задачі.

| Вибір дії | Критерій Вальда | Критерій крайнього оптимізму | Критерій Севіджа | Критерій Гурвіца | Критерій Лапласа |
|---|---|---|---|---|---|
| *Перша задача* | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| *Друга задача* | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |

З цього можна зробити висновок, що для першої задачі нам слід обрати дію 1, тобто провести маркетингову акцію для озимого ріпаку. Щодо другої задачі, за критеріями Вальда та Севіджа слід обрати стратегію 1 і вкласти гроші в ОВДП, за іншими критеріями − стратегію 3 і вкласти гроші в акції підприємства. Багато залежить від схильності до ризику особи, що приймає рішення.

# ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Ivanenko V.I. Non-Stochastic Randomness and Decision Systems. – Springer, 2013. – 496 с.
2. Методи прийняття рішень в економіці: Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи для студентів галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 «Економіка» освітнього ступеня «магістр» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ж.Т.Черноусова. – Електронні текстові данні, 2017.
3. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: «Мир», 1974. – 496 с.
4. Чернов Г., Мозес Л.Е. Элементарная теория статистических решений. М.: «Советское радио», 1962. – 406 с.
5. Мельник В.С., Солонуха О.В. Теорія корисності та попит: Навч.-метод. посіб. – К.: ІВЦ «Політехніка», 2001. – 68 с.
6. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте: Руководство для будующих топ-менеджеров. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 688с.
7. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика.– М.:Янус-К, 2001. – 656 с.
8. Балан В.Г. Прийняття управлінських рішень. Методи, моделі, терміни, поняття, категорії. Тестові завдання. Ділові ігри. Навчальний посібник. К.: Нічлава, 2008. – 465 с.
9. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: «Наука», 1970. – 708 с.
10. Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: «Мир», 1977. – 652 с.